# XVI Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

## Eliminacje – cykl listopadowy

### Poziom: gimnazja, 10 punktów za każde

**Zadanie 1.**

Ile jest równa suma cyfr liczby będącej wartością wyrażenia:

$$10^{100} - 10^{99} + 10^{98} - 10^{97} + 10^{96} - 10^{95} + ... + 10^{2} - 10^{1}$$

**Rozwiązanie.**

$$(10^{100} - 10^{99}) + (10^{98} - 10^{97}) + (10^{96} - 10^{95}) + ... + (10^{2} - 10^{1}) =$$
$$= 10^{99}(10-1) + 10^{97}(10-1) + 10^{95}(10-1) + ... + 10(10-1) =$$
$$= 9 \cdot 10^{99} + 9 \cdot 10^{97} + 9 \cdot 10^{95} + ... + 9 \cdot 10^{1}$$

Liczba ma zatem 100 cyfr, na przemian występują w niej cyfry 9 i 0. W zapisie jest 50 dziewiątek i 50 zer, zatem suma cyfr tej liczby jest równa $50 \cdot 9 + 50 \cdot 0 = 450$.

**Odpowiedź:** Suma cyfr tej liczby wynosi 450.

**Zadanie 2.**

Wyznacz liczbę trzycyfrową, która jest 12 razy większa od sumy swoich cyfr.

**Rozwiązanie.**

Oznaczmy: x – cyfra setek, y – cyfra dziesiątek, z- cyfra jedności poszukiwanej liczby, $x \in \{1,2,3,...,9\}$ $y, z \in \{0,1,2,...,9\}$.

Wówczas z warunków zadania otrzymujemy:

$$100x + 10y + z = 12(x + y + z)$$

lub równoważnie

$$88x = 2y + 11z.$$

Ponieważ 11 dzieli 88*x* i 11*z*, to

$$2y = 88x - 11z = 11 \cdot (8x - z)$$

a stąd 11 dzieli 2*y*. Ponieważ $y, z \in \{0,1,2,...,9\}$, to *y* = 0. Wstawiając ten wynik do ostatniego równania otrzymujemy 8*x* = *z*. Stąd ostatecznie wnioskujemy, że *x* = 1 i *z* = 8.

**Odpowiedź:** Poszukiwana liczba to 108.

**Zadanie 3.**

Gdy Mateusz miał tyle lat, ile Bartek ma teraz, to był od niego dwa razy starszy. Gdy Bartek będzie miał tyle lat, ile Mateusz ma teraz, Mateusz będzie miał 32 lata. Ile lat ma obecnie każdy z chłopców?

**Rozwiązanie.**

Zadania tego typu możemy rozwiązać z pomocą tabeli.

| | ***a* lat temu** | **teraz** | **za *a* lat** |
|---|---|---|---|
| **Mateusz** | $x$ | $x + a$ | $x + 2a$ |
| **Bartek** | $x - a$ | $x$ | $x + a$ |

Ponieważ $a$ lat temu Mateusz był 2 razy starszy od Bartka, więc mamy pierwsze równanie:

$$x = 2 \cdot (x - a)$$

Za $a$ lat Mateusz będzie miał 32 lata, więc mamy drugie równanie:

$$x + 2a = 32$$

Po rozwiązaniu układu równań $\begin{cases} x = 2 \cdot (x - a) \\ x + 2a = 32 \end{cases}$

otrzymujemy rozwiązanie.

**Odpowiedź:** Bartek ma 16 lat, a Mateusz 24 lata.

**Zadanie 4.**

Bok prostokąta ma długość 24 cm, a jego przekątna 26 cm. Przekątna dzieli prostokąt na dwa trójkąty. W każdy z nich wpisujemy koło. Oblicz odległość między środkami tych kół.

**Rozwiązanie.**

Stosując twierdzenie Pitagorasa łatwo uzasadnić, że długość drugiego boku prostokąta jest równa 10. Wykorzystując np. wzór na pole trójkąta i promień okręgu wpisanego w ten trójkąt obliczamy:

$$r = \frac{P}{p} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24}{\frac{1}{2}(10 + 24 + 26)} = 4 .$$

Odległość $x$ środków okręgów wpisanych w trójkąty jest długością przeciwprostokątnej trójkąta o przyprostokątnych długości $10 - 2r$ i $24 - 2r$.

Zatem

$$x^2 = (10 - 2r)^2 + (24 - 2r)^2 = 2^2 + 16^2 = 260 ,$$

czyli $x = \sqrt{260} = 2\sqrt{65}$.

**Odpowiedź:** Szukana odległość to: $2\sqrt{65}$.

**Zadanie 5.**

Dany jest kwadrat *ABCD* o boku *a*. Narysowano okrąg o promieniu $r = \frac{3}{4}a$ przechodzący przez punkt *D* i styczny do boku *AB* w punkcie E. Oblicz długość odcinka *DE.*

**Rozwiązanie.**

Sytuację opisaną w zadaniu przedstawia rysunek:

Wiedząc, że

$|AD| = a$ oraz

$|AF| = |EO| = \frac{3}{4}a$

możemy obliczyć długość odcinka *DF:*

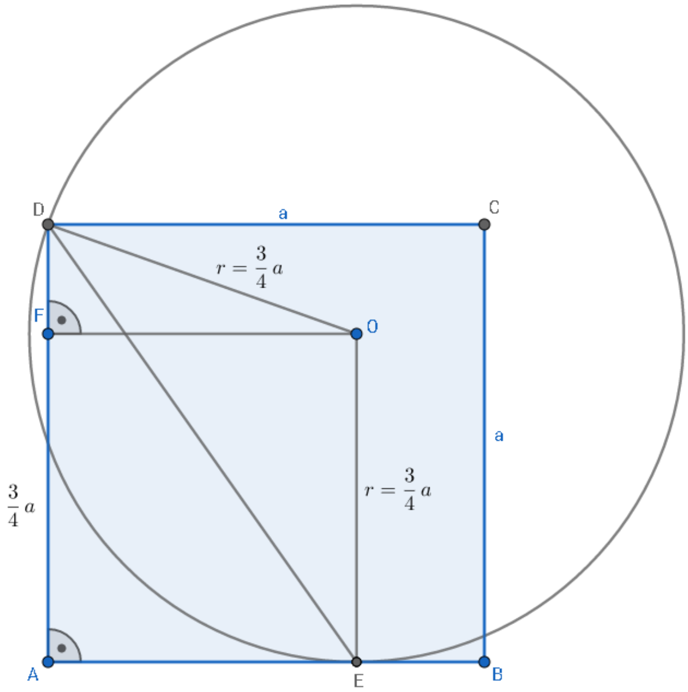
$|DF| = a - \frac{3}{4}a = \frac{1}{4}a$

Korzystając z tw. Pitagorasa dla trójkąta *DFO* możemy obliczyć długość odcinka *FO*.

$$\left(\frac{1}{4}a\right)^2 + |FO|^2 = \left(\frac{3}{4}a\right)^2$$

Stąd:

$$|FO| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$




Odcinek *AE* jest równy odcinkowi *FO*. Zatem korzystając z tw. Pitagorasa dla trójkąta *DAE* możemy obliczyć długość szukanego odcinka *DE*.

$$a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = |DE|^2$$

Stąd (po usunięciu niewymierności z mianownika) otrzymujemy, że $|DE| = \frac{\sqrt{6}}{2}a$ .

**Odpowiedź.** $|DE| = \frac{\sqrt{6}}{2}a$