Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Eliminacje – cykl listopadowy,

Poziom: gimnazjum, punktacja: 10 punktów za każde zadanie

Zadanie 1.
Ustawić w porządku rosnącym liczby 9^{60}, 3^{160}, 5^{60}, 27^{50}, 2^{240}.

Rozwiązanie.
Należy porównać parami poszczególne liczby:

$5^{60} < 9^{60}$, $\quad 9^{60} = (3^2)^{60} = 3^{120} < 3^{150} = 27^{50}$, $\quad 27^{50} = 3^{150} < 3^{160}$

Mamy więc $5^{60} < 9^{60} < 27^{50} < 3^{160}$.

Pozostała kwestia, gdzie umieścić liczbę 2^{240}. Po pierwsze $2^{240} = 8^{80} < 9^{80} = 3^{160}$.
Po drugie $2^{240} = (2^8)^{30}$, oraz $27^{50} = 3^{150} = (3^5)^{30}$ i wobec tego wystarczy porównać $2^8 = 256$ i $3^5 = 243$. Stąd $2^8 > 3^5$ i w konsekwencji $2^{240} = (2^8)^{30} > (3^5)^{30} = 27^{50}$ czyli $27^{50} < 2^{240} < 3^{160}$.

Odpowiedź. $5^{60} < 9^{60} < 27^{50} < 2^{240} < 3^{160}$.

Zadanie 2.
Oskar wypisuje obok siebie kolejne liczby naturalne zaczynając od 1:

123456789101112131415...

tak długo, aż zapisze obok siebie pięć jednakowych cyfr. Którą z kolei zapisaną cyfrą będzie pierwsza z pięciu jednakowych cyfr? Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie.
Pięć jednakowych cyfr wystąpi w zapisie Oskara po napisaniu liczb 111 i 112.
Teraz po kolei liczymy wypisane cyfry:
- jednocyfrowych od 1 do 9 jest 9,
- dwucyfrowych od 10 do 99 jest 90, co daje $2 \cdot 90$ cyfr,
- trzycyfrowych od 100 do 110 jest 11, co daje $3 \cdot 11$ cyfr,
- pierwsza cyfra liczby 111, to dodatkowo 1 cyfra.

Razem mamy więc

$$9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 11 + 1 = 223$$

Odpowiedź. Pierwsza z pięciu jedynek będzie 223 cyfrą zapisaną przez Oskara.

Zadanie 3.
Na dno sześciennego naczynia o krawędzi 8 cm położono graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 2 cm i wysokości 8 cm tak, że ściana boczna przylega do dna. Do naczynia wlano tyle wody, by tylko przykryć włożoną bryłę. Następnie graniastosłup postawiono na jego podstawie. Na jaką wysokość sięga teraz woda w naczyniu?

Rozwiązanie:
Do naczynia wlano $8^2 \cdot 2 - 2^2 \cdot 8 = 96$cm^3 wody.
h – szukana wysokość

$96 = (8^2 - 2^2) \cdot h$
$h = 1{,}6$ (cm)

Odpowiedź. Woda w naczyniu sięga na wysokość 1,6 cm.

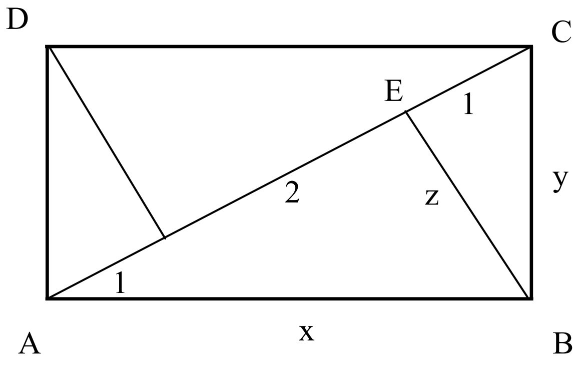
Zadanie 4.
Wojtek wypisał 9 kolejnych liczb naturalnych. Skreślił wszystkie te liczby, które są podzielne przez 2, 3 lub 7. Została mu tylko liczba 79. Podaj liczby, które wypisał Wojtek. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie:
Jeśli po wykreśleniu wszystkich pozostałych liczb została liczba 79, to najmniejszą z 9 wypisanych mogła być liczba 71, a największą – 87. Wykreślamy wszystkie liczby podzielne przez 2, 3, 7. Otrzymujemy:
71, ~~72~~, 73, ~~74~~, ~~75~~, ~~76~~, ~~77~~, ~~78~~, 79, ~~80~~, ~~81~~, ~~82~~, 83, ~~84~~, 85, ~~86~~, ~~87~~.

Odpowiedź: Wojtek wypisał liczby: 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82.

Zadanie 5.
Przez przeciwległe wierzchołki prostokąta poprowadzono prostopadłe do przekątnej dzieląc tę przekątną na odcinki długości 1cm, 2 cm i 1 cm. Obliczyć długości boków prostokąta.

Rozwiązanie.



Z rysunku widzimy, że możemy wykorzystać własności trzech trójkątów prostokątnych:
ABC, ABE i BEC. Ze wzory Pitagorasa otrzymujemy dla tych trójkątów:

$x^2 + y^2 = (1+2+1)^2 = 16$, $\quad 3^2 + z^2 = x^2 \quad$ i $\quad z^2 + 1^2 = y^2$

Jeśli od równania drugiego odejmiemy stronami równanie trzecie, to otrzymamy

$x^2 - y^2 = 8$ co po dodaniu stronami do równania pierwszego prowadzi do równania $2x^2 = 24$ i w konsekwencji $x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ oraz $y = 2$.

Odpowiedź. Boki prostokąta mają długości $2\sqrt{3}$ oraz 2.