XVII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl kwietniowy - obowiązkowy
Poziom: klasy 8-9

Zadanie 1.

Oblicz średnią arytmetyczną liczb $16 \cdot 10^{2018}$ i $2{,}8 \cdot 10^{2019}$ oraz $0{,}46 \cdot 10^{2020}$. Wynik zapisz w notacji wykładniczej.

Rozwiązanie.

Średnią trzech liczb wyliczymy:

$$\frac{16 \cdot 10^{2018} + 2{,}8 \cdot 10^{2019} + 0{,}46 \cdot 10^{2020}}{3} =$$

$$= \frac{16 \cdot 10^{2018} + 2{,}8 \cdot 10 \cdot 10^{2018} + 0{,}46 \cdot 10^{2} \cdot 10^{2018}}{3} =$$

$$= \frac{16 \cdot 10^{2018} + 28 \cdot 10^{2018} + 46 \cdot 10^{2018}}{3} =$$

$$= \frac{(16 + 28 + 46) \cdot 10^{2018}}{3} =$$

$$= \frac{90 \cdot 10^{2018}}{3} =$$

$$= 30 \cdot 10^{2018} = 3 \cdot 10^{2019}$$

Odpowiedź. Średnia arytmetyczna tych liczb zapisana w notacji wykładniczej jest równa $3 \cdot 10^{2019}$.

Zadanie 2.

Jeżeli do liczby pięciocyfrowej dopiszesz 1 z lewej strony, to otrzymasz liczbę trzykrotnie mniejszą niż wówczas, gdy dopiszesz 1 z prawej strony. Wyznacz tę liczbę.

Rozwiązanie.

$x - szukana\ liczba\ pięciocyfrowa$

$$100\,000 + x = \frac{1}{3}(10x + 1)$$

$$300\,000 + 3x = 10x + 1$$

$$7x = 299\,999$$

$$x = 42\,857$$

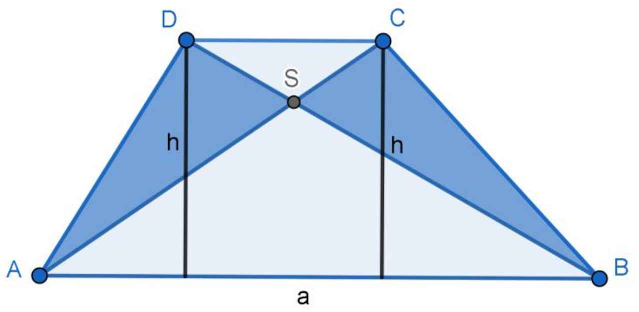
Odpowiedź. Szukana liczba to 42 857.

Zadanie 3.

Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych w trapezie ABCD, gdzie AB i CD są podstawami tego trapezu. Wykaż, że pole trójkąta BCS jest równe polu trójkąta ASD.

Rozwiązanie.

Przedstawmy zadanie na rysunku:



W trapezie ABCD podstawy są równoległe ($AB \| DC$).

Pole trójkąta ABD będzie równe

$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$

Pole trójkąta ABC będzie również równe

$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$

Trójkąty ABD i ABC mają wspólny trójkąt ABS.

Skąd wynika, że pola trójkąta ASD i trójkąta BCS są równe.

cnd.

Zadanie 4.

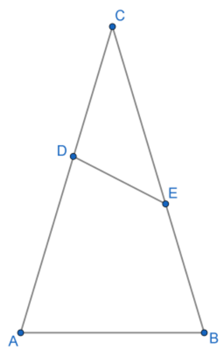
W trójkącie równoramiennym ABC

$|BC| = |AC|$,

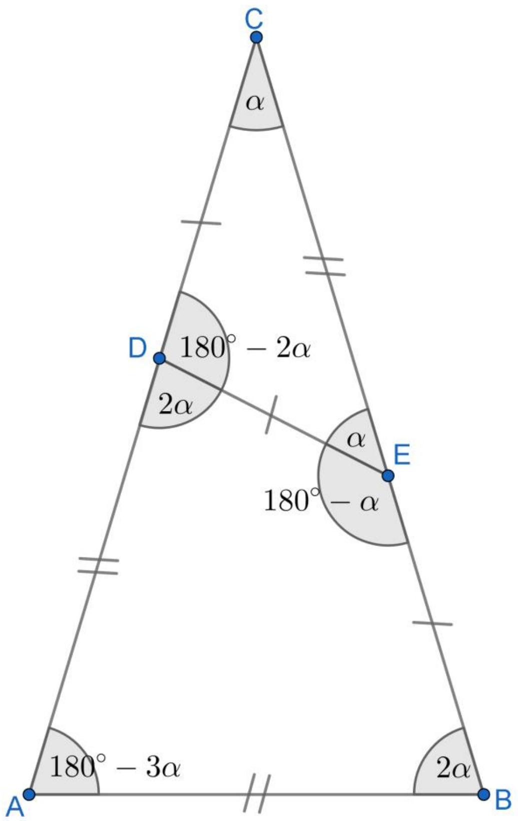
$|CE| = |DA| = |AB|$,

$|CD| = |DE|$ (patrz rysunek).

Oblicz miarę kąta przy wierzchołku C.



Rozwiązanie.



Trójkąt ABC jest równoramienny.

Ponieważ $|BC| = |AC|$ oraz $|CD| = |DE|$,

to również $|CD| = |BE|$, czyli $|BE| = |DE|$.

Oznaczmy kąt przy wierzchołku C jako α.

Trójkąt ECD jest równoramienny, zatem kąty przy podstawie mają równe miary. Suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie jest równa 180°, więc mamy trzeci kąt trójkąta ECD.

Kąty ADE i EDC są przyległe, więc suma ich miar jest równa 180°. Podobnie kąty BED i DEC.

Czworokąt ABED to deltoid, więc kąty ADE i ABE mają równe miary.

Suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie ABC jest też równa 180°, więc możemy stąd wyznaczyć kąt BAC.

Trójkąt ABC jest równoramienny, a zatem jego kąty przy podstawie mają równe miary:

$$180° - 3\alpha = 2\alpha$$

Skąd otrzymujemy, że $\alpha = 36°$.

Odpowiedź. Kąt przy wierzchołku C ma miarę równą 36°.

Zadanie 5.

Do zbiornika w kształcie prostopadłościanu o wymiarach 20 dm, 10 dm i 10 m wlano 5000 *l* mleka o zawartości 3,4% tłuszczu. Resztę dopełniono mlekiem o zawartości tłuszczu 4,2%. Ile procent tłuszczu zawiera obecnie mleko w zbiorniku?

Rozwiązanie.

Obliczamy objętość zbiornika:

$$V = 20dm \cdot 10dm \cdot 100dm = 20000dm^3.$$

Ilość mleka o zawartości 4,2% tłuszczu wynosi $20000dm^3 - 5000dm^3 = 15000dm^3$.

W nim zawarte jest $15000dm^3 \cdot 4{,}2\% = 630dm^3$ tłuszczu.

W $5000dm^3$ zawarte jest $5000dm^3 \cdot 3{,}4\% = 170dm^3$. Razem w zbiorniku było

$$630dm^3 + 170dm^3 = 800dm^3.$$

Mleko w zbiorniku zawiera $\frac{800}{20000} \cdot 100\% = 4\%$ tłuszczu.

Odpowiedź. Obecnie mleko w zbiorniku zawiera 4% tłuszczu.