Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl kwietniowy - obowiązkowy
Poziom: gimnazja
Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w szkole)

Zadania przeznaczone do rozwiązywania w szkole w formie sprawdzianu w czasie 90 minut. Cykl kwalifikuje, wg oceny szkoły, do finału zawodów

Zadanie 1.

Uzasadnij, że liczba $\frac{6+6^2+6^3+...+6^{100}}{1+2+4}$ jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie:

$$\frac{6+6^2+6^3+\cdots+6^{100}}{1+2+4} = \frac{(6+6^2)+(6^3+6^4)+(6^5+6^6)+\cdots+(6^{99}+6^{100})}{7} =$$
$$= \frac{6(1+6)+6^3(1+6)+6^5(1+6)+\cdots+6^{99}(1+6)}{7} =$$
$$= \frac{6\cdot 7+6^3\cdot 7+6^5\cdot 7+\cdots+6^{99}\cdot 7}{7} = \frac{7(6+6^3+6^5+\cdots+6^{99})}{7} =$$
$$= 6+6^3+6^5+\cdots+6^{99}$$

Wyrażenie $6+6^3+6^5+\cdots+6^{99}$ jest sumą liczb całkowitych, zatem jest liczbą całkowitą **c.n.d**

Zadanie 2.

W turnieju brały udział trzy grupy rybaków. Każdy rybak z pierwszej grupy złowił 13 ryb, z drugiej grupy – 5 ryb, a z trzeciej grupy – 4 ryby. Wiedząc, że razem było 16 rybaków i złowili oni w sumie 113 ryb, oblicz, ilu rybaków było w każdej z grup.

Rozwiązanie:

Przyjmując oznaczenia:

x – liczba rybaków w I grupie

y – liczba rybaków w II grupie

z – liczba rybaków w III grupie

i korzystając z informacji w zadaniu mamy:

$$x + y + z = 16 \quad \text{oraz} \quad 13x + 5y + 4z = 113$$

Wyliczając z pierwszego równania

$$z = 16 - x - y$$

i podstawiając do drugiego otrzymamy po przekształceniach:

$$y = 49 - 9x$$

Przyjmując za x kolejne liczby naturalne mamy:

x	1	2	3	4	5	6
$y = 49 - 9x$	40	31	22	13	4	-5
$z = 16 - x - y$	-25	-17	-9	-1	7	15
	odpada	odpada	odpada	odpada		odpada

Odpowiedź. W pierwszej grupie było 5 rybaków, w drugiej 4, a w trzeciej 7.

Zadanie 3.

Biegacz i rowerzysta wyruszają razem z miasta A do miasta B, odległego od A o 13 km. Poruszają się zgodnie tam i z powrotem nie zatrzymując się. Wiedząc, że biegacz przebiega 9 km w ciągu 1 godziny, a rowerzysta pokonuje w tym czasie 25 km, oblicz jaka odległość dzieli tych dwóch sportowców po trzech godzinach od początku współzawodnictwa?

Rozwiązanie:

Droga przebyta przez biegacza: $3 \cdot 9 = 27$ (km).

Droga przebyta prze rowerzystę: $3 \cdot 25 = 75$ (km).

Określmy, gdzie znajdowali się sportowcy po 3 godzinach współzawodnictwa:

27 : 13 = 2 reszta 1 1km- odległość biegacza od miasta A

75 : 13 = 5 reszta 10 10 km – odległość rowerzysty od miasta B.

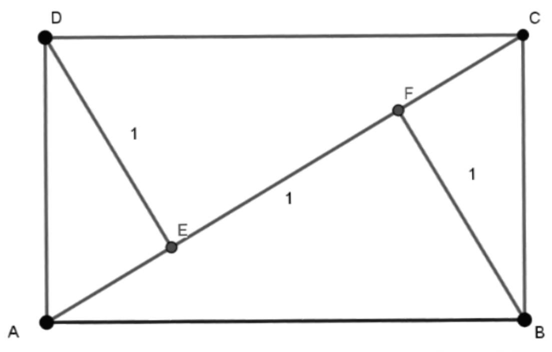
Odległość między zawodnikami: 13 – 10 – 1 = 2 (km).

Odpowiedź: 2 km

Zadanie 4.

W prostokącie ABCD poprowadzono odcinki DE i BF prostopadłe do przekątnej AC. Wiedząc, że $|DE| = |EF| = |FB| = 1$, oblicz pole tego prostokąta.

Rozwiązanie:



Niech *a* i *b* będą wymiarami prostokąta. Oznaczmy przez x przekątną tego prostokąta. Wówczas pole tego prostokąta jest równe, to pola dwóch trójkątów prostokątnych ABC i ACD :

$$P = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1 = x .$$

Wtedy w trójkącie AED otrzymujemy zależność $a^2 = 1^2 + (\frac{x-1}{2})^2$, natomiast w trójkącie ABF – zależność $b^2 = 1^2 + (\frac{x+1}{2})^2$.

Zatem $$a^2 + b^2 = 2 + \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 .$$

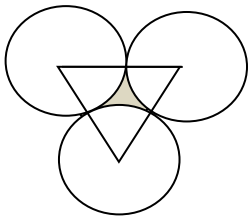
Stąd $x^2 = 5$, czyli $x = \sqrt{5}$

Odpowiedź. Pole tego prostokąta wynosi $\sqrt{5}$.

Zadanie 5.

Dane są trzy koła styczne zewnętrznie, wszystkie o promieniu 3cm. Oblicz pole powierzchni figury ograniczonej tymi kołami.

Rozwiązanie:



Należy zauważyć, że pole powierzchni figury ograniczonej trzema kołami stycznymi zewnętrznie to różnica między polem powierzchni trójkąta równobocznego o boku długości 6cm, a trzema wycinkami koła o kącie środkowym 60°, stanowiącymi łącznie połowę koła o promieniu 3cm.

Zatem pole powierzchni trójkąta równobocznego:

$$P_\Delta = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}[cm^2] ,$$

pole powierzchni trzech wycinków kołowych o kącie środkowym 60° :

$$P_w = \frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 = \frac{9}{2}\pi[cm^2],$$

pole powierzchni figury ograniczonej kołami stycznymi zewnętrznie:

$$P_f = 9(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})[cm^2]$$

Odpowiedź. $P_f = 9(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})[cm^2]$