# Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

## Eliminacje – cykl kwietniowy - obowiązkowy

## Poziom: gimnazja

**Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w szkole)**

**Zadanie 1.**

Udowodnij , że dla każdej liczby nieparzystej *n*, liczba postaci $n^3 - n^2 - n + 1$ jest podzielna przez 16.

**Rozwiązanie.**

Przede wszystkim zauważmy, że

$$n^3 - n^2 - n + 1 = (n^3 - n) - (n^2 - 1) = n(n^2 - 1) - (n^2 - 1) = (n-1)(n^2 - 1) =$$

$$= (n-1)(n-1)(n+1) = (n-1)^2(n+1)$$

Ponieważ $n$ jest liczbą nieparzysta, to $n = 2k + 1$ dla $k \in N$. Wtedy

$$n^3 - n^2 - n + 1 = (n-1)^2(n+1) = (2k)^2(2k+2) = 8k^2(k+1) = 8k \cdot k(k+1)$$

Dwie kolejne liczby naturalne są zawsze podzielne przez dwa, bo któraś z nich jest parzysta, więc $k(k+1) = 2l$, czyli

$$n^3 - n^2 - n + 1 = 8k \cdot k(k+1) = 16kl, \text{ gdzie } kl \in N.$$

**Zadanie 2.**

Klient banku zapomniał czterocyfrowy szyfr swojego sejfu. Pamiętał tylko, że szyfr ten jest liczbą pierwszą, a iloczyn cyfr tego sejfu jest równy 243. Ile minimalnie prób musi wykonać, by mieć pewność, że otworzy swój sejf.

**Rozwiązanie.**

Zauważmy, że $243 = 3 \cdot 9 \cdot 9$. Jedynymi dzielnikami liczby 243 są potęgi liczby 3.

Ze względu na to, że liczba poszukiwana jest liczbą pierwszą, zatem jedna z cyfr tej liczby musi być 1, a pozostałymi cyframi 3, 9, 9 (gdyby wszystkie cyfry były postaci 3 lub 9, to liczba dzieliłaby się przez trzy).

Istnieje zatem 12 możliwości ustawienia cyfr 1,3,9,9: 1993,1939, 1399, 3199, 3919, 3991, 9139, 9193, 9319, 9391, 9913, 9931.

Liczby 3991 i 9139 są podzielne przez 13 czyli klient musi wykonać minimum 10 prób.

**Odpowiedź**. Są dwie w zasadzie możliwe odpowiedzi: jeśli klient nie będzie sprawdzał czy utworzone liczby są pierwsze (sprawdzanie jest żmudne i w zasadzie w praktyce nierealne), to powinien wykonać dwanaście prób. Jeśli będzie sprawdzał czy liczby są pierwsze, to 10 prób.

**Zadanie 3.**

W świeżych grzybach było 90% wody, pomyślał Adam. Po wysuszeniu grzyby stały się o 15 kg lżejsze i teraz jest w nich tylko 60% wody. Ile grzybów nazbierałem?

**Rozwiązanie.**

**I sposób.**

Niech $x$ oznacza masę grzybów świeżych, a $y$ masę grzybów po wysuszeniu. Wobec tego ilość wody przed wysuszeniem była równa $0{,}9x$, po wysuszeniu $0{,}6y$ i różnica wynosiła 15 kg.

Stąd równania $0{,}9x = 15 - 0{,}6y$ oraz $x - y = 15$, które możemy zapisać jako układ

$$\begin{cases} 9x - 6y = 150 \\ x - y = 15 \end{cases}$$

Po prosty rachunkach otrzymujemy $x = 20$ i $y = 5$.

**II sposób.**

Równanie dla ilości wody:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\boxed{90\%}$ | $-$ | $\boxed{100\%\ \text{woda}}$ | $=$ | $\boxed{60\%}$ |
| x – świeże grzyby | | 15kg | | x-15 kg |

$90\% \cdot x - 100\% \cdot 15 = 60\% \cdot (x - 15)$

$0{,}9x - 15 = 0{,}6(x - 15)$

$0{,}9x - 15 = 0{,}6x - 9$

$0{,}3x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 20$

**III sposób.**

x- masa świeżych grzybów przeznaczonych do suszenia

90% x – woda w x kg grzybów

10% x – masa suchych grzybów

x– 15 – masa grzybów po wysuszeniu

W grzybach nie zmienia się sucha masa(jest stała)

100% - 60% = 40%

40%(x-15) – masa suchych grzybów po odparowaniu 15 kg wody

40%(x – 15)= 10% x, stąd x = **20**

**Odpowiedź**. Adam nazbierał 20 kg grzybów.

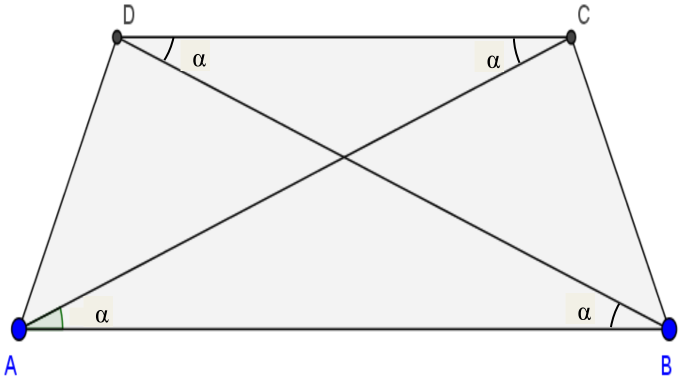
**Zadanie 4.**

Dowolne trzy wierzchołki trapezu równoramiennego niebędącego równoległobokiem wyznaczają trójkąt równoramienny. Znajdź miary kątów tego trapezu.

**Rozwiązanie**.

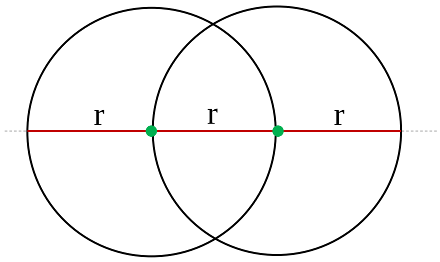
Niech $\alpha = |\angle CAB|$. Wtedy: $\alpha = |\angle ACD| = |\angle CDB| = |\angle DBA| = |\angle CAD|$.

Stąd $|\angle DAB| = 2\alpha = |\angle ADB|$, a więc $5\alpha = 180^\circ$. Zatem $\alpha = 36^\circ$.

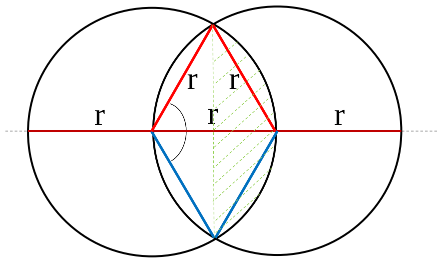



**Odpowiedź**. Kąty trapezu mają miary: $72^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 108^\circ$.

**Zadanie 5.**
Obliczyć pole części wspólnej dwóch kół o jednakowych promieniach długości r, jeżeli środek każdego z tych kół leży na obwodzie drugiego z tych kół.




**Rozwiązanie.**
Należy zauważyć, że pole szukanej części wspólnej składa się z dwóch wycinków koła opartych na kącie $120^\circ$, ponieważ wewnątrz części wspólnej możemy wpisać dwa trójkąty równoboczne, a więc dwa razy $60^\circ$.




Pole wycinka koła opartego na kącie $120^\circ$ równe jest $\frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$. Stąd pole części wspólnej równe jest $2(\frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2) = (\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2})r^2$.

**Odpowiedź**. Pole części wspólnej jest równe $(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2})r^2$.