XVII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Eliminacje – cykl grudniowy

Poziom: gimnazja, klasy 8 i 9

Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w „domu”)

Zadanie 1.

Wykaż, że $\sqrt{9+\sqrt{80}}-\sqrt{9-\sqrt{80}}=4$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy $x=\sqrt{9+\sqrt{80}}-\sqrt{9-\sqrt{80}}$. Zauważmy, że $x>0$.

Podnosząc obie strony równania do kwadratu otrzymujemy:

$$x^2=9+\sqrt{80}-2\sqrt{9+\sqrt{80}}\sqrt{9-\sqrt{80}}+9-\sqrt{80}$$

$$x^2=18-2\sqrt{\left(9+\sqrt{80}\right)\left(9-\sqrt{80}\right)}$$

$$x^2=18-2\sqrt{81-80}$$

$$x^2=18-2\sqrt{1}$$

$$x^2=16$$

stąd $x=-4$ lub $x=4$. Ponieważ x jest większe od zera, więc $x=4$.

Zadanie 2.

Cztery gramy czystego złota stopiono z dwoma stopami złota i srebra, jeden próby 920, a drugi próby 880, otrzymując 40 g nowego stopu próby 900. Oblicz, ile ważyły dwa stopy złota i srebra na początku.

Rozwiązanie:

Zapisując warunki zadania metodą kubełkową otrzymujemy:

waga	4		x		y		40
próba	1000	+	920	+	880	=	900

Stąd otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 4+x+y=40 \\ 4\cdot 1000+920x+880y=40\cdot 900 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ 920x + 880y = 36000 - 4000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ 92x + 88y = 3200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -92x - 92y = -3312 \\ 92x + 88y = 3200 \end{cases}$$

$$-4y = -112$$

$$y = 28\ [g]$$

$$x = 36 - 28 = 8\ [g]$$

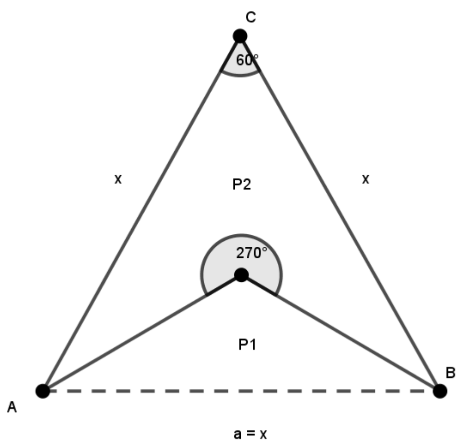
Odpowiedź. Na początku stop próby 920 ważył 8g, a stop próby 880 ważył 28g.

Zadanie 3.

Boki czworokąta niewypukłego są parami równe. Dwa kąty tego czworokąta mają miary 60° i 270°. Krótszy bok ma długość 2 cm. Oblicz pole tego czworokąta.

Rozwiązanie:

Trójkąt ABC jest równoboczny.



$$h_{ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$x = a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$h_{ABC} = \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

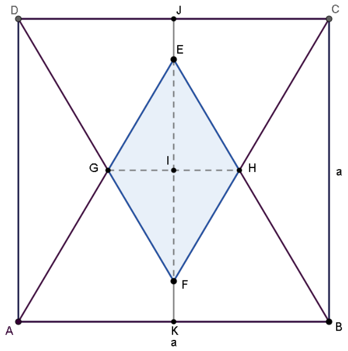
$P_1 = \frac{1}{2}\cdot 2^2 = 2$ - jako połowa pola kwadratu.

$$P_2 = P_{ABC} - P_1 = 2\sqrt{3} - 2$$

Odpowiedź. Pole tego czworokąta jest równe $(2\sqrt{3} - 2)cm^2$.

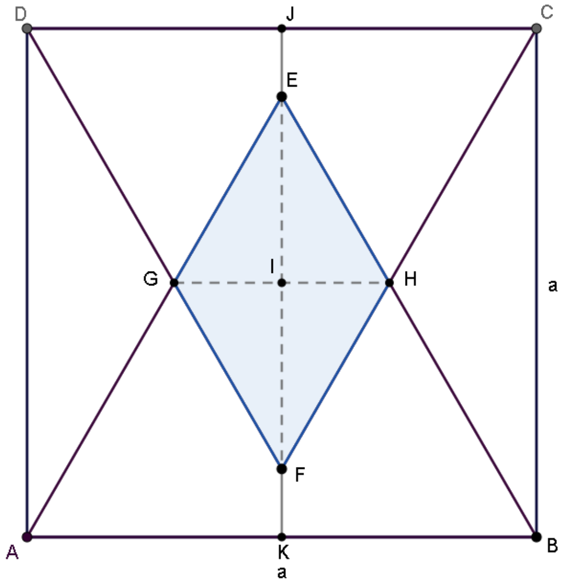
Zadanie 4.

Mamy dany kwadrat o boku *a*. We wnętrzu tego kwadratu na jego przeciwległych bokach rysujemy dwa trójkąty równoboczne o boku *a*. Oblicz pole figury, która jest częścią wspólną tych trójkątów.



Rozwiązanie:

Przedstawmy zadanie na rysunku:



Widzimy, że część wspólna tych trójkątów jest rombem FHEG. Do obliczenia pola potrzebujemy zatem długości przekątnych GH oraz FE.

Obliczając różnicę długości boku i wysokości trójkąta równobocznego otrzymamy długości odcinków FK oraz JE.

$$|FK| = |JE| = a - \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Zatem

$$|FE| = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \left(a - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = a\sqrt{3} - a$$

Mamy więc już długość jednej przekątnej rombu.

Długość przekątnej GH możemy policzyć korzystając z podobieństwa trójkątów GHE oraz ABE.

Otrzymujemy zatem

$$\frac{AB}{GH} = \frac{KE}{IE}$$

$$\frac{a}{GH} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}-a}{2}}$$

$$|GH| = \frac{a\cdot(a\sqrt{3}-a)}{2}\cdot\frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}-a}{\sqrt{3}} = \frac{3a-a\sqrt{3}}{3}$$

Zostało już tylko policzyć pole rombu.

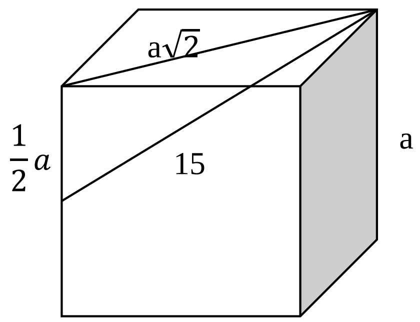
$$P = \frac{(a\sqrt{3}-a)\cdot\frac{3a-a\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{a^2(3\sqrt{3}-3-3+\sqrt{3})}{6} = \frac{a^2(4\sqrt{3}-6)}{6} = \frac{a^2(2\sqrt{3}-3)}{3}$$

Odpowiedź. Pole części wspólnej tych trójkątów wynosi $\frac{a^2(2\sqrt{3}-3)}{3}$.

Zadanie 5.

Najdłuższy odcinek łączący środek krawędzi sześcianu z jego wierzchołkiem ma długość 15. Oblicz objętość sześcianu.

Rozwiązanie:



$$(\frac{1}{2}a)^2 + (a\sqrt{2})^2 = 15^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 + 2a = 225$$

a=10

V=1000.

Odpowiedź. V=1000