XVI Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl grudniowy
Poziom: gimnazja

Zadanie 1.

Dla liczby naturalnej n przez p(n) oznaczamy iloczyn cyfr liczby n. Na przykład p(23) = 6, p(100) = 0, p(1999) = 729. Oblicz:

p(1) +p(2) + p(3) + ...+ p(100).

Rozwiązanie:

Zauważmy, że p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(6) = 6, p(7) = 7, p(8) = 8 i p(9) = 9, oraz $p(\overline{ki}) = p(k)\cdot p(i)$, gdzie $\overline{ki}$ oznacza liczbę dwucyfrową o cyfrach k, i.

Wówczas:

$$\begin{aligned}
p(1)+p(2)+p(3)+...+p(100) &= p(1)+p(2)+...+p(9)+p(1)(p(1)+p(2)+...+p(9))+ \\
&+ p(2)(p(1)+p(2)+...+p(9))+...+p(9)(p(1)+p(2)+...+p(9))+p(100)= \\
&= p(1)+p(2)+p(3)+...+p(9)+(p(1)+p(2)+...+p(9))^2 = \\
&= 1+2+3+...+9+(1+2+3+...+9)^2 = 45+45^2 = 45+2025 = 2070
\end{aligned}$$

Odpowiedź. Szukana suma wynosi 2070

Zadanie 2.

Kogut kosztuje 5 monet, kura 3 monety, a za 3 kurczęta trzeba zapłacić 1 monetę. Za 100 monet kupiono 100 ptaków. Ile było wśród nich kogutów, kur i kurcząt?

Rozwiązanie:

Oznaczmy liczbę kogutów jako x, liczbę kur y, liczbę kurczaków jako k. Z treści zadania wynikają dwa równania:

$$\begin{cases} x+y+k=100 \\ 5x+3y+\frac{1}{3}k=100 \end{cases}, \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x+y+k=100 \\ 15x+9y+k=300 \end{cases}.$$

Jeśli od drugiego równania odejmiemy pierwsze, uzyskamy

$$14x+8y=200 \quad \text{czyli} \quad 7x+4y=100,$$

skąd

- x, y, k muszą być liczbami naturalnymi,
- $x < 15$ (bo $7\cdot 15=105>100$),
- x musi być podzielne przez 4 (bo $7x=100-4y=4(25-y)$).

Rozważmy więc wszystkie możliwe wartości, jakie może przyjmować x:

x	$7x$	$4y$	y	$x+y$	k
12	84	16	4	16	84
8	56	44	11	19	81
4	28	72	18	22	78
0	0	100	25	25	75

Wszystkie cztery przypadki spełniają warunki zadania (jeśli dopuścimy, że może nie być kogutów), zadanie ma więc cztery rozwiązania:

Liczba kogutów	Liczba kur	Liczba kurcząt
12	4	84
8	11	81
4	18	78
0	25	75

Zadanie 3.

Dane są liczby (zapisane w różnych systemach: trójkowym i dwójkowym) $10002_{(3)}$ oraz $111100_{(2)}$. Która z liczb jest większa? Zapisz sumę tych liczb w systemie dziesiątkowym.

Rozwiązanie:

Zamieniamy liczby na system dziesiątkowy:

$10002_{(3)} = 2\cdot3^0 + 0\cdot3^1 + 0\cdot3^2 + 0\cdot3^3 + 1\cdot3^4 = 2 + 81 = 83_{(10)}$

$111100_{(2)} = 0\cdot2^0 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^2 + 1\cdot2^3 + 1\cdot2^4 + 1\cdot2^5 = 4 + 8 + 16 + 32 = 60_{(10)}$

Zatem $10002_{(3)} > 111100_{(2)}$ oraz

$$10002_{(3)} + 111100_{(2)} = 83_{(10)} + 60_{(10)} = 143_{(10)}.$$

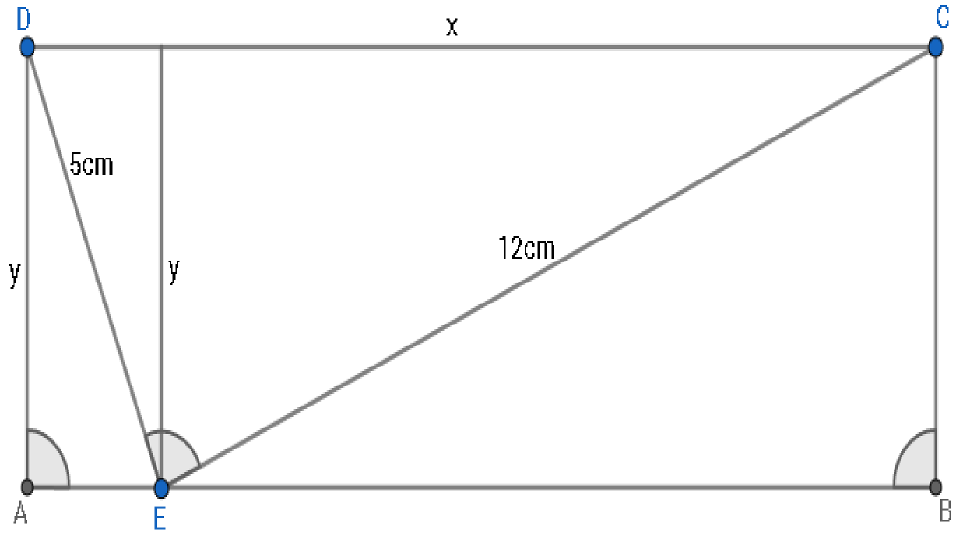
Odp. Liczba $10002_{(3)}$ jest większa niż $111100_{(2)}$, a suma tych liczb w systemie dziesiątkowym jest równa 143.

Zadanie 4.

Prostokąt ABCD podzielono na trzy trójkąty prostokątne. Odcinek DE ma długość 5cm, a odcinek CE ma 12cm. Oblicz pole tego prostokąta.

Rozwiązanie:

Po zaznaczeniu kątów prostych mamy:



Stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta DEC obliczymy długość boku CD:

$$5^2 + 12^2 = x^2$$

$$x = 13cm$$

Pole trójkąta DEC jest równe:

$$P_{DEC} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30cm^2$$

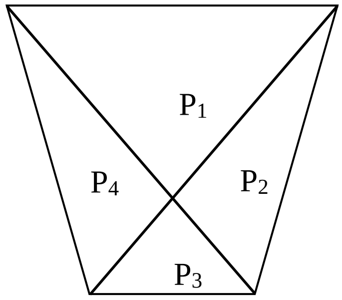
Zauważmy, że wysokość trójkąta DEC jest równa długości krótszego boku prostokąta. Zatem pole prostokąta ABCD jest równe:

$$P_{ABCD} = 2 \cdot P_{DEC} = 2 \cdot 30cm^2 = 60\ cm^2$$

Odpowiedź. Pole prostokąta ABCD jest równe 60cm^2.

Zadanie 5.

Przekątne trapezu podzieliły trapez na cztery trójkąty: P_1, P_2, P_3, P_4. Oblicz pole trapezu wiedząc, że $P_3=16$, $P_2=36$.



Rozwiązanie:

Oznaczmy przez a długość krótszej podstawy trapezu i przez h wysokość trapezu. Wtedy

$$P_3+P_2 = \frac{a \times h}{2} \qquad P_4+P_3 = \frac{a \times h}{2}$$

zatem $P_2 = P_4$. Ponieważ w trapezie zachodzi zależność:

$$P_2 = \sqrt{P_1} \times \sqrt{P_3}\ ,$$

więc

$$36 = \sqrt{P_1} \times 4\ ,$$

a stąd otrzymujemy $P_1 = 81$.

Pole trapezu równa się: $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 81+36+16+36 = 169$

Odpowiedź. Pole trapezu równe jest 169.