Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Eliminacje – cykl grudniowy,

Poziom: gimnazjum, punktacja: 10 punktów za każde zadanie

Zadanie 1.
Podaj wszystkie liczby dwucyfrowe takie, że suma cyfr jest równa trzeciej części tej liczby. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.
Liczba dwucyfrowa składa się z dwóch cyfr x, y.
Niech x będzie cyfrą dziesiątek ($x > 0$), a y – cyfrą jedności. Wtedy liczbę można zapisać w postaci $10x + y$. Z warunków zadania wynika, że spełnione jest równanie

$$x + y = \frac{1}{3}(10x + y)$$

co po uproszczeniu można zapisać w postaci $2y = 7x$.

Dla $x = 2$ i $y = 7$ spełniony jest powyższy warunek i tylko dla tych cyfr (co łatwo sprawdzić).

Odpowiedź: Jedyną liczbą o podanej własności jest 27.

Zadanie 2.
Dwunastu robotników wykonuje pewną pracę w ciągu 25 dni. Po 5 dniach liczbę robotników zwiększono i pracę wykonano 4 dni przed terminem. Ilu robotników zatrudniono dodatkowo do wykonania tej pracy?

Rozwiązanie.

x – wydajność dzienna robotnika w stosunku do całości pracy,

y - liczba robotników po 5 dniach

Ponieważ 12 robotników przez 25 dni wykonuje całą pracę, więc

$$12 \cdot 25 \cdot x = 1 \text{ i stąd } x = \frac{1}{300}.$$

Część wykonanej pracy przez dwunastu pracowników przez 5 dni

$$12 \cdot 5 \cdot \frac{1}{300} = \frac{1}{5}$$

Pozostałą część pracy wykonywało y robotników przez $25 - 5 - 4 = 16$ dni

$$16 \cdot \frac{1}{300} \cdot y = \frac{4}{5}$$

$$y = 15$$

Odp. Do wykonania pracy zatrudniono dodatkowo 3 robotników.

Zadanie 3.

Znajdź dwucyfrową liczbę naturalna o następujących własnościach: jeżeli do tej liczby dopisać z lewej strony cyfrę 6, to otrzymamy liczbę, która jest iloczynem danej liczby i liczby od niej większej o dwa.

Rozwiązanie.

Liczbę dwucyfrową możemy zapisać $l = 10x + y$, gdzie x, y to cyfry $0,1,\ldots,9$, $x \neq 0$. Jeżeli dopiszemy z lewej strony 6, to otrzymamy liczbę $6 \cdot 100 + 10x + y$, która spełnia równanie

$$6 \cdot 100 + 10x + y = l(l+2)$$

Stąd

$$6 \cdot 100 + 10x + y = (10x + y)(10x + y + 2) = 100x^2 + 20xy + 20x + y^2 + 2y$$

Aby zachodziła powyższa równość musi być spełniona relacja $x^2 \leq 6$, więc $x = 1$ lub $x = 2$.

Jeśli $x = 1$, to mamy równanie $6 \cdot 100 + 10 + y = 100 + 20y + 20 + y^2 + 2y$, które po przekształceniach ma postać

$$490 = 21y + y^2,$$

którego nie spełnia żadna cyfra y.

Jeśli $x = 2$, to wtedy $620 + y = 400 + 40y + 40 + y^2 + 2y$ co daje

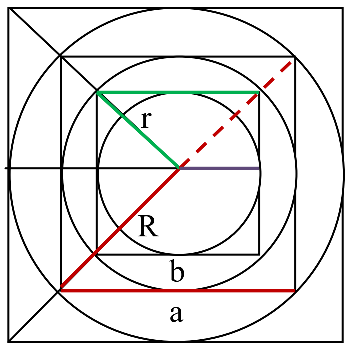
$$180 = 41y + y^2.$$

Równanie to jest spełnione tylko przez $y = 4$. Ostatecznie szukana liczba to 24.

Odpowiedź. Szukana liczba to 24.

Zadanie 4.
W kwadrat wpisano okrąg, a potem kwadrat i znowu okrąg tak do momentu, aż uzyskano trzy kwadraty i trzy okręgi (boki kwadratów są do siebie równoległe). Największy okrąg ma promień równy 5. Jaką długość ma bok najmniejszego kwadratu?

Rozwiązanie.

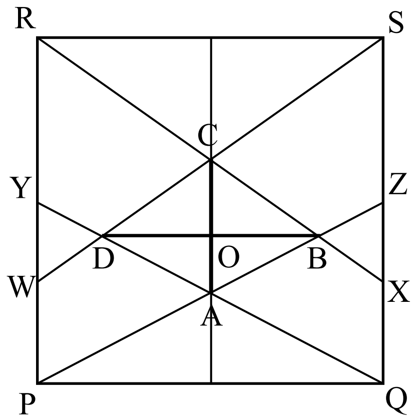


Zauważmy, że promień największego okręgu jest połową przekątnej środkowego kwadratu.

Więc przekątna spełnia na mocy twierdzenia Pitagorasa warunek $(2 \cdot 5)^2 = a^2 + a^2$. Wyliczając z tego równania $a = \sqrt{50}$ i dzieląc przez 2 otrzymujemy promień środkowego okręgu równy $r = \sqrt{50}/2 = 5\frac{\sqrt{2}}{2}$, który jest połową przekątnej najmniejszego kwadratu. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy bok b najmniejszego kwadratu: $\sqrt{50}^2 = b^2 + b^2$ co daje $b = 5$.

Odpowiedź. Bok najmniejszego kwadratu ma długość 5.

Zadanie 5.
Kwadrat na rysunku obok ma bok o długości 1 oraz |PW|=|QX|=1/5 oraz |SZ|=|RY|=1/3
Oblicz długość przekątnych czworokąta ABCD.



Rozwiązanie.

Na początek ustalmy długości odcinków $|XS| = |WR| = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ oraz $|PY| = |QZ| = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Zauważmy, że odcinki SW i RX są przekątnymi prostokąta WXSR, więc ich punkt przecięcia C dzieli wysokość prostokąta np. XS na połowy. Ponieważ $|XS| = \frac{4}{5}$, to odległość punktu C od odcinka RS jest równa $\frac{1}{2}|XS| = \frac{2}{5}$.

Analogicznie odległość punktu A od odcinka PQ jest równa $\frac{1}{2}|QZ| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Stąd przekątna AC czworokąta ABCD jest równa $|AC| = 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$.

Zauważmy teraz, że trójkąty DOC i SRW są podobne oraz DOA z QPY. Stąd

$$\frac{|OC|}{|RW|} = \frac{|OD|}{|RS|} = |OD| \quad \text{oraz} \quad \frac{|OA|}{|PY|} = \frac{|OD|}{|PQ|} = |OD|.$$

Porównując ostatnie równania otrzymujemy $\frac{|OC|}{|RW|} = \frac{|OA|}{|PY|}$, skąd otrzymujemy

$|OA| = \frac{|PY||OC|}{|RW|}$. Ponieważ

$$|AC| = \frac{4}{15} = |OC| + |OA| = |OC|\left(1 + \frac{|PY|}{|RW|}\right) = |OC| \cdot \frac{11}{6}$$

co wyznacza długość $|OC| = \frac{24}{165}$,

a to prowadzi do równości $|BD| = 2|OD| = 2\frac{|OC| \cdot |RS|}{|RW|} = \frac{2 \cdot |OC|}{|RW|} = \frac{48}{165} \cdot \frac{5}{4} = \frac{12}{33}$.

Odpowiedź. Długości przekątnych to: $|AC| = \frac{4}{15}$ i $|BD| = \frac{12}{33}$.