NIERÓWNOŚĆ CAUCHY'EGO POMIĘDZY ŚREDNIMI

ANDRZEJ ORLICKI, ANNA SZCZEPKOWSKA
Wydział Matematyki i Informatyki UWM

Średnią arytmetyczną na pewno dobrze znasz już od dawna drogi Czytelniku. Przypomnijmy zatem, że

Definicja 1. *Średnią arytmetyczną n liczb $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbę*

$$S_a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Rzadziej, a może nawet wcale, nie spotkałeś tzw. średniej goemetrycznej liczb (są i inne średnie, ale o tym kiedy indziej).

Definicja 2. *Średnią geometryczną n liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ nazywamy liczbę*

$$S_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Przykład 1. *Obliczymy średnią geometryczną liczb $a = 2, b = 4, c = 1$:*

$$S_g = \sqrt[3]{2 \cdot 4 \cdot 1} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Okazuje się, że przy rozwiązywaniu zadań, w których należy udowodnić, że zachodzi pewna nierówność przydaje się znajomość zależności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną. Dokładniej, użyteczna jest znajomość następującego twierdzenia

Twierdzenie 1. *Dla dowolnych liczb nieujemnych $a_1, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność*

$$(*) \quad S_a \geq S_g,$$

przy czym równość $S_a = S_g$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Podana w powyższym twierdzeniu nierówność jest słynną w matematyce nierównością Cauychy'ego między średnią arytmetyczną a geometryczną. Nazwa pochodzi od nazwiska wybitnego francuskiego matematyka Augustina Louisa Cauchy'ego.

Przyjrzyjmy się nierówności $(*)$ w przypadku dwóch liczb nieujemnych a, b. Mamy

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Dowód powyższej własności jest elementarny. Wystarczy równoważnie przekształcać wyjściową nierówność do czasu uzyskania jakiejś oczywistej już dla nas nierówności. I tak

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$
$$(a+b)^2 \geq 4ab$$
$$a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \geq 0$$
$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$
$$(a-b)^2 \geq 0$$

Dowód twierdzenia 1, niezależnie od obranej taktyki (znanych jest kilka wersji dowodu), jest nieco bardziej skomplikowany. Jeśli chcesz zapoznać się z dowodem twierdzenia, to zobacz np.[1]. My dowodzić twierdzenia 1 tutaj nie będziemy. Pokażemy natomiast jak wykorzystać odpowiednią zależność przy rozwiązywaniu zadań.

Zadanie 1. *Pokaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność*

$$8abc \leq (a+b)(b+c)(c+a).$$

ROZWIĄZANIE:

Skorzystamy trzykrotnie z zależności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną, stosowanej dla par liczb odpowiednio a i b, b i c, c i a. Dostajemy

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}, \quad \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca},$$

skąd

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}, \quad b+c \geq 2\sqrt{bc}, \quad c+a \geq 2\sqrt{ca}.$$

Trzy ostatnie nierówności mnożymy teraz stronami i uzyskujemy

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ca}.$$

Do prawej strony powyższej nierówności aplikujemy teraz własności działania na pierwiastkach i dostajemy nierówność

$$8abc \leq (a+b)(b+c)(c+a).$$

Przyjrzyjmy się teraz trudniejszemu zadaniu

Zadanie 2. *Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność*

$$\frac{a^3}{c^2} + \frac{b^3}{a^2} + \frac{c^3}{b^2} \geq a+b+c.$$

ROZWIĄZANIE:

Stosujemy nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną trzy razy

$$\frac{9 \cdot \frac{a^3}{c^2} + 4 \cdot \frac{b^3}{a^2} + 6 \cdot \frac{c^3}{b^2}}{19} \geq \sqrt[19]{\left(\frac{a^3}{c^2}\right)^9 \cdot \left(\frac{b^3}{a^2}\right)^4 \cdot \left(\frac{c^3}{b^2}\right)^6} =$$

$$= \sqrt[19]{\frac{a^{27} \cdot b^{12} \cdot c^{18}}{a^8 \cdot b^{12} \cdot c^{18}}} = \sqrt[19]{a^{19}} = a,$$

czyli

$$(1) \quad 9 \cdot \frac{a^3}{c^2} + 4 \cdot \frac{b^3}{a^2} + 6 \cdot \frac{c^3}{b^2} \geq 19a.$$

Podobnie uzyskujemy nierówności

$$(2) \quad 4 \cdot \frac{a^3}{c^2} + 6 \cdot \frac{b^3}{a^2} + 9 \cdot \frac{c^3}{b^2} \geq 19c.$$

$$(3) \quad 6 \cdot \frac{a^3}{c^2} + 9 \cdot \frac{b^3}{a^2} + 4 \cdot \frac{c^3}{b^2} \geq 19b.$$

Pozostaje już tylko dodać stronami nierówności (1), (2), (3), a uzyskaną niewrówność stronami podzielić przez 19.

Na koniec podajemy zadanie do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 3. *Niech a, b, c, d będą liczbami dodatnimi takimi, że $a+b+c+d=1$. Pokaż, że największą wartością jaką przyjmuje wyrażenie*

$$abc + bcd + cda + dab$$

jest $\frac{1}{16}$.

Zadania (2) i (3) prezentowane w niniejszym artykule pochodzą z [2]. Tam znajdziesz jeszcze inne zadania, w rozwiązaniu których można wykorzystać nierówność tutaj omawianą.

References

[1] Lev Kurlyandchik, Wędrówki po krainie nierówności, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń, 2000.

[2] Lev Kurlyandchik, Matematyka elementarna w zadaniach, tom II, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń, 2005.