Pochodna, jej interpretacje i zastosowania

Marek Golasiński, Wydział Matematyki i Informatyki UWM w Olsztynie

Czym jest pochodna funkcji?

Niech $f : U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej $x \in \mathbb{R}$ określoną w otoczeniu punktu $x_0 \in U$ dla $U \subseteq \mathbb{R}$. Oznaczmy przez Δx przyrost zmiennej niezależnej x, zaś przez $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ przyrost zmiennej zależnej y.

Wyrażenie $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ nazywamy *ilorazem różnicowym*; jest on funkcją przyrostu zmiennej niezależnej. *Pochodną* funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę (o ile istnieje):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

co symbolicznie zapisuje się w jednej z postaci:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \ \frac{dy}{dx}, \ \frac{d}{dx} f(x_0), \ f'(x_0), \ y'(x_0).$$

Jeżeli przyjmie się, że $x = x_0 + \Delta x$, to pochodną w punkcie x_0 można zapisać następująco:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Często w publikacjach przyrost Δx oznacza się literą h. Wtedy pochodna jest równa:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Jeśli funkcja f ma pochodną dla każdego elementu $x \in U$ swej dziedziny, to można rozważać odwzorowanie przypisujce każdemu argumentowi, jego pochodną dla tego elementu. Przekształcenie to nazywa się *funkcją pochodną* funkcji f lub krótko: pochodną f oznaczaną symbolem f'.

Wyznaczanie pochodnych

Pochodne niektórych funkcji elementarnych

1) $(c)' = 0$ - funkcja stała;

2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ - funkcja potęgowa,

w szczególności, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

3) $(a^x)' = a^x \ln a$ dla $a > 0$-funkcja wykadnicza,

w szczególności, $(e^x) = e^x$;

4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \ln a$ dla $a > 0$ oraz $a \neq 1$ - funkcja logarytmiczna,

w szczególności, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

Funkcje trygonometryczne

5) $(\sin x)' = \cos x$,

6) $(\cos x)' =$-$\sin x$;

7) $(\text{tg } x)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2\, x$.

Własności funkcji pochodnej

1) iloczyn pochodnej przez stałą,

$$(af)'(x) = af'(x);$$

2) pochodna sumy funkcji (addytywność),

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x);$$

3) pochodna iloczynu funkcji (reguła Leibniza),

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

4) pochodna ilorazu funkcji (reguła ilorazu),

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad \text{o ile} \quad g(x) \neq 0;$$

5) pochodna odwrotności funkcji (reguła odwrotności),

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}, \qquad \text{o ile} \qquad g(x) \neq 0;$$

6) pochodna złożenia funkcji (reguła łańcuchowa),

$$f'(x) = h'\big(g(x)\big)g'(x) \qquad \text{dla} \qquad f(x) = h(g(x)).$$

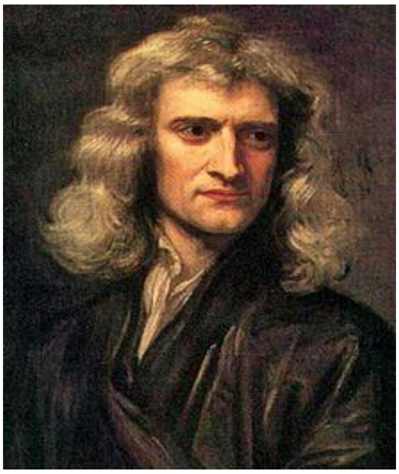
Rys historyczny

W XVII wieku europejscy matematycy; Isaac Barrow, Ren Descartes, Pierre de Fermat, Blaise Pascal, John Wallis and inni rozważali pomysł wprowadzenia pochodnej. Jednak główną rolę w utworzeniu współczesnego rachunku różniczkowego odegrali niezależnie:

Gottfried Wilhelm (von) Leibniz (01.07.1646 — 14.11.1716) wszechstronnie wykształcony niemiecki filozof

oraz

Sir Isaac Newton (25.12.1642 — 20.03.1726/27): angielski matematyk astronom i filozof.



Oznczenia pochodnej:

1) **Leibnitz:** $\frac{dy}{dx}$ dla $y = f(x)$;

2) **Lagrange:** $f'(x)$;

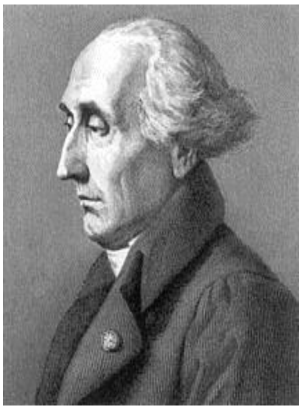
3) **Newton:** jeśli $y = f(t)$, to $\dot{y}$;

4) **Euler:** Df dla $y = f(x)$.

Leonhard Euler (ur. 15.04.1707 w Bazylei, zm. 18.09.1783 w Petersburgu) szwajcarski matematyk i fizyk; był pionierem w wielu obszarach obu tych nauk. Większą część życia spędził w Rosji i Prusach. Jest uważany za jednego z najbardziej produktywnych matematyków w historii.

Oto przypisywane Laplace'owi zdanie wyrażajęce wpływ Eulera na matematykę: ,,Czytajcie Eulera, czytajcie go - jest mistrzem nas wszystkich".

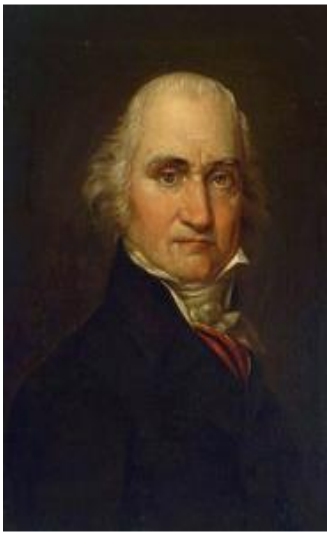
Joseph Louis Lagrange (ur. 25.01.1736 w Turynie, zm. 10.04.1813 w Paryżu) matematyk i astronom pochodzenia włoskiego, pracujący we Francji i przez dwadzieścia lat w Berlinie dla króla pruskiego Fryderyka II.



Terminologia polska

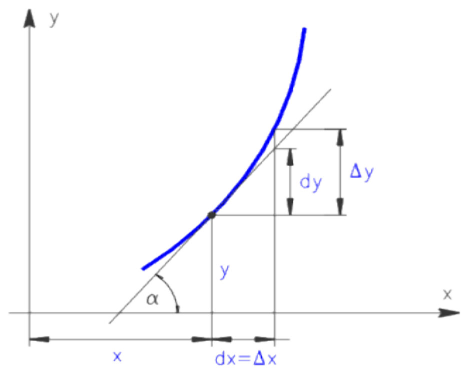
Jan Chrzciciel Władysaw Śniadecki (ur. 29.08.1756 w Żninie, zm. 21.11.1830 w Jaszunach koło Wilna) - polski astronom, matematyk, filozof, geograf, pedagog, krytyk literacki i teoretyk języka, autor kalendarzy i poeta. Przyczynił się do upowszechnienia polskiej terminologii matematycznej.

We wrześniu 1781 (po powrocie do kraju przez Wiedeń) wezwany przez Komisję Edukacji Narodowej, został mianowany szefem katedry i profesorem matematyki wyższej i astronomii w Krakowie (Wyższa Szkoa Koronna). Wykłady z matematyki rozpoczął już 9 listopada 1781, a 11 miesięcy później (30 września 1782) zaczął wykładać astronomię. Był pierwszym w swej uczelni wykadowcą tych dwu przedmiotów w języku polskim.



Interpretacja geometryczna pochodnej

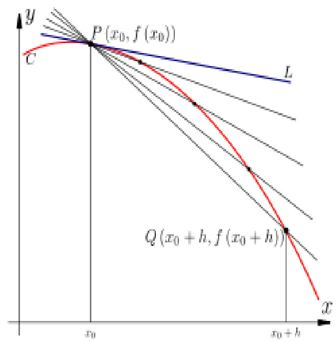
Jeżeli wykresem funkcji $y = f(x)$ w układzie współrzędnych prostokątnych jest pewna krzywa, to wartość pochodnej $f'(x)$ w danym punkcie (tzn. przy danej wartości x) równa się tgα, gdzie α jest kątem między osią OX i styczną do krzywej w tym punkcie.



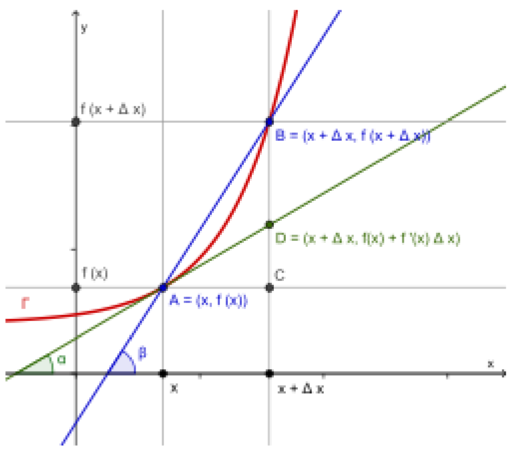
Wobec tego równanie stycznej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ dane jest wzorem

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0).$$

Styczna w punkcie P jako granica siecznych PQ.



Styczna i sieczna do krzywej Γ.



Zastosowania w fizyce

Prędkość chwilowa:

Załóżmy, że ciało porusza się wzdłuż prostej tak że $s = f(t)$ oznacza zależność współrzędnej s ustalonego punktu ciała od czasu t. Droga przebyta przez to ciało w przedziale czasu $[t, t + \Delta t]$ wynosi

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t).$$

Prędkością średnią na tym odcinku jest wielkość:

$$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Prędkość chwilowa w momencie t jest równa:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = f'(t).$$

Natężenie prądu:

Niech ΔQ oznacza ładunek przepływający przez ustalony przekrój przewodnika w czasie Δt. Wówczas wielkość

$$I_{sr} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

nazywa się *średnim natężeniem* prądu.

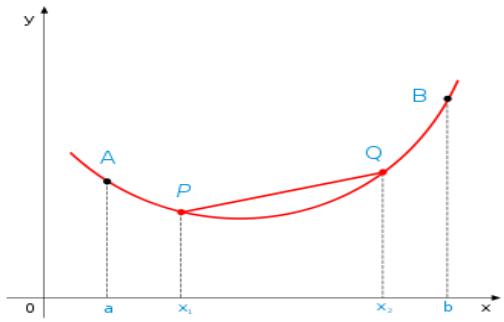
Chwilowym natężeniem prądu jest wielkość:

$$I = \frac{dQ}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

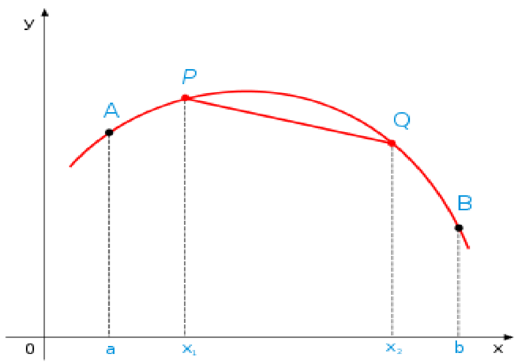
Uwaga: Symbol I pochodzi od francuskiego ,,intensitè de courant", (po angielsku: current intensity).

Badanie przebiegu zmienności funkcji (wykres funkcji)

Wypukłość funkcji $f : C \to \mathbb{R}$: jeśli C jest przedziałem, to geometryczny sens jest następujący: łuk wykresu funkcji łączący dowolne dwa punkty P, Q tego wykresu leży poniżej lub na cięciwie PQ.

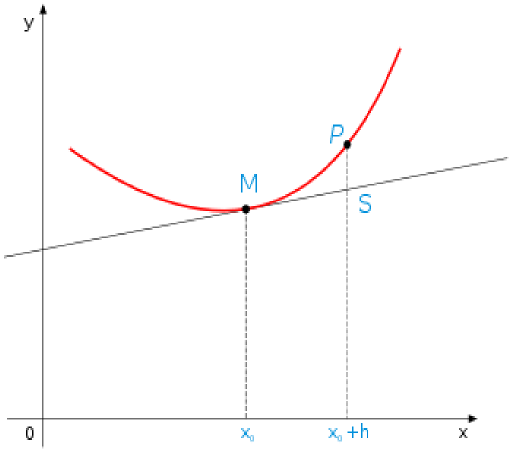


Wklęsłość funkcji $f : C \to \mathbb{R}$: w powyższej definicji słowo poniżej zastąpimy przez powyżej.



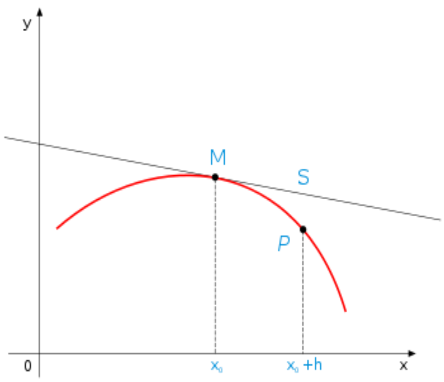
Funkcja różniczkowalna $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest wypukła w przedziale otwartym (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy jej wykres funkcji leż y ponad wykresem stycznej dla każdego punktu $x_0 \in (a, b)$. W przypadku funkcji różniczkowalnej zapisuje się to wzorem

$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0) \text{ dla } x, x_0 \in (a, b).$$



Funkcja różniczkowalna $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest wklęsła w przedziale (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji leẏ pod wykresem stycznej dla każdego punktu $x_0 \in (a, b)$. W przypadku funkcji różniczkowalnej zapisuje się to wzorem:

$$f(x) - f(x_0) \leq f'(x_0)(x - x_0) \text{ dla } x, x_0 \in (a, b).$$

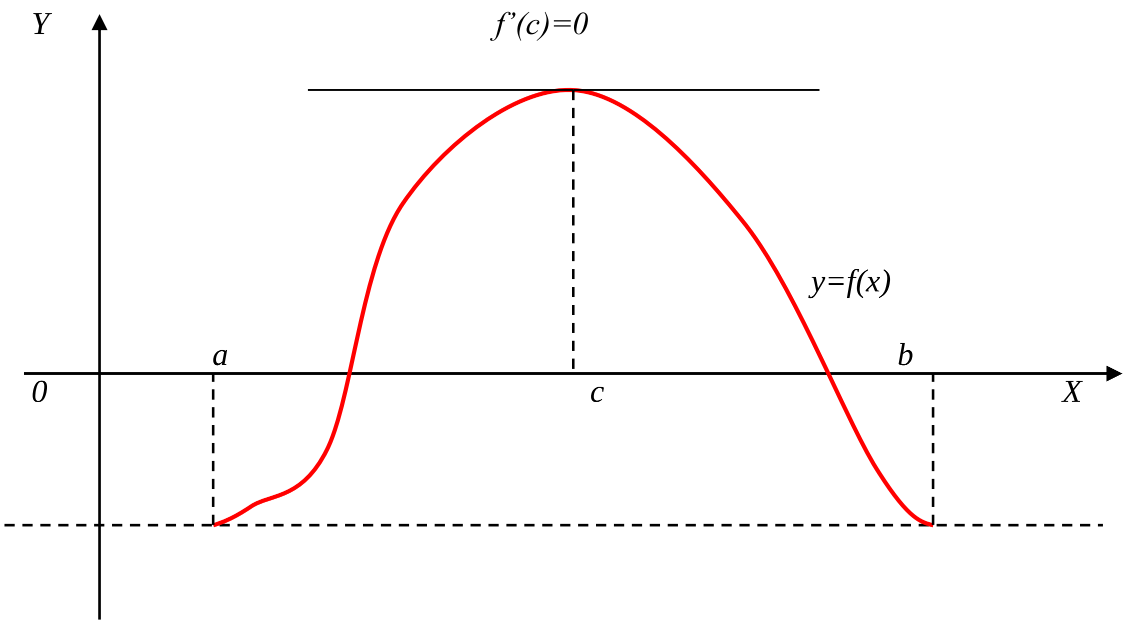


Twierdzenie (Rolle'a) *Jeżeli funkcja f jest:*

- *ciągła na przedziale* $[a,b]$,
- *różniczkowalna na przedziale* $(a;b)$
- $f(a) = f(b)$,

to istnieje taki punkt $c \in (a;b)$, że $f'(c) = 0$.

Interpretacja geometryczna twierdzenia Rolle'a



Uwaga: Twierdzenie Rolle'a zapewnia istnienie w przedziale $(a;b)$ jednego punktu c, w którym pochodna znika: $f'(c)=0$, co nie wyklucza, że punktów takich może być więcej, a nawet nieskończenie wiele, jak to jest na przykład w przypadku funkcji stałej.

Z twierdzenia Rolle'a korzystamy często gdy:

$$f(a)=f(b)=0.$$

Przykład. Zastosowanie twierdzenia Rolle'a dla funkcji $f(x)=\sin x$ w przedziale $[0, \pi]$,

- funkcja ciągła i różniczkowalna
- $f(0)=f(\pi)=0$.

Istnieje więc taki punkt $c\in(0;\pi)$, że $f'(c)=0$. Ponieważ $f'(x)=\cos x$, stąd $c=\dfrac{\pi}{2}$.

Twierdzenie (o przyrostach, Lagrange'a) *Jeżeli funkcja f jest:*

- *ciągła na przedziale domkniętym o końcach* x_0 *i x,*
- *ma pierwszą pochodną wewnątrz tego przedziału,*

to istnieje taki punkt c leżący między x_0 *i x, że*

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0).$$

Niech

$\Delta f = f(x) - f(x_0)$ - przyrost funkcji *f*

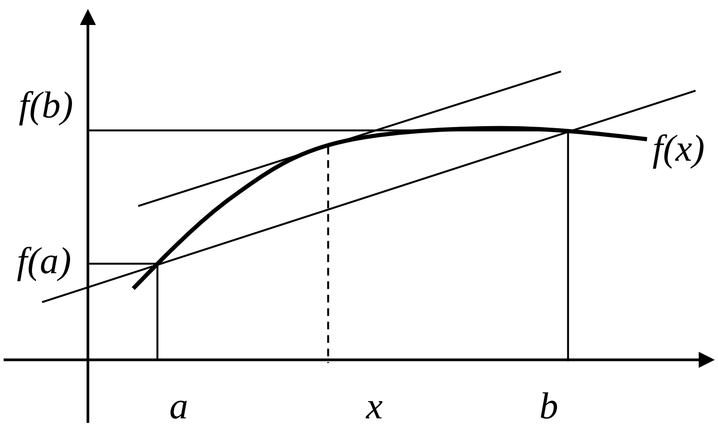
$\Delta x = x - x_0$ - przyrost zmiennej *x*

wtedy:

$$\Delta f = f'(c)\Delta x.$$

Stąd nazwa ***twierdzenie o przyrostach.***

Interpretacja geometryczna twierdzenia Lagrange'a



Twierdzenie Lagrange'a mówi, że istnieje punkt $x \in [a, b]$, że styczna do krzywej w punkcie $(x, f(x))$ jest równoległa do prostej przechodzącej przez punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$.

Przykład. Zastosowanie twierdzenia Lagrange'a do funkcji $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$ dla $a=1$ i $b=3$.

$$f(a) = f(1) = -5$$
$$f(b) = f(3) = 31$$

Na mocy twierdzenia istnieje dokładnie jedna wartość *c* pomiędzy *a=1* i *b=3*, taka, że

$$f'(c) = \frac{31-(-5)}{3-1} = \frac{36}{2} = 18$$

Obliczmy wartość *c*.

$f'(x) = 6x^2 - 8$

$$6x^2 - 8 = 18 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{13}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\sqrt{\frac{13}{3}},\ x_2 = \sqrt{\frac{13}{3}}$$

$$\sqrt{\frac{13}{3}} \in (1,3) \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{13}{3}}\ .$$