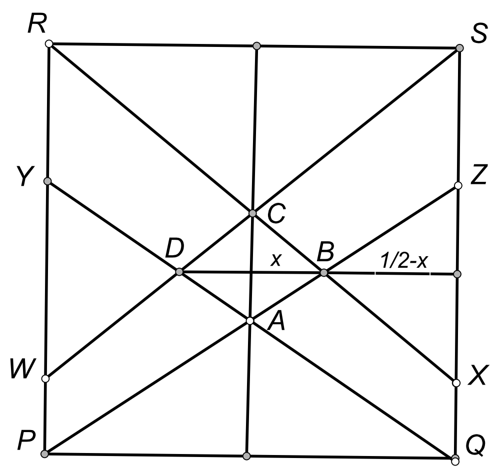
# Rozwiązanie i uogólnienie zadania o kwadracie z cyklu grudniowego

*Jarosław Kosiorek, Wydział Matematyki i Informatyki UWM*

W grudniowym cyklu dla gimnazjum znalazło się między innymi następujące zadanie o kwadracie:

**Zadanie 5.** Kwadrat na rysunku obok ma bok o długości 1 oraz $|PW| = |QX| = 1/5$ i $|SZ| = |RY| = 1/3$. Oblicz długości przekątnych czworokąta $ABCD$. Zamieszczone już na naszej stronie rozwiązanie można nieco uprościć.

**Rozwiązanie.**




Długość pionowej przekątnej $AC$ wyznaczamy tak samo, jak w podanym wcześniej rozwiązaniu. Korzystając z tego, że punkt $C$ jest środkiem prostokąta $WXSR$ wyznaczamy jego odległość od boku $RS$, która jest równa połowie długości odcinka $SX$, czyli $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$. Analogicznie korzystając z prostokąta $PQZY$ wyznaczamy odległość punktu $A$ od boku $PQ$ równą $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ i odejmując wyznaczone odległości od długości boku kwadratu dostajemy długość przekątnej $|AC| = 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$.

W celu wyznaczenia drugiej przekątnej skorzystać możemy z podobieństwa trójkątów $ABC$ i $ZBX$, które mają przystające kąty, jako wierzchołkowe (przy $B$) lub naprzemianległe (przy pozostałych odpowiadających sobie wierzchołkach). W podobnych trójkątach stosunek odpowiadających sobie boków jest taki sam, jak stosunek wysokości opuszczonych na te boki. Jeśli oznaczymy przez $x$ wysokość trójkąta $ABC$ opuszczoną na $AC$, to odpowiadająca jej wysokość trójkąta $ZBX$ ma długość $\frac{1}{2} - x$, ponieważ uzupełniają się one do połowy boku kwadratu. Dostajemy zatem proporcję:

$$\frac{x}{\frac{1}{2} - x} = \frac{|AC|}{|ZX|}.$$

Łatwo jest wyznaczyć $|XC| = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$. Stąd

$$\frac{x}{\frac{1}{2} - x} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{7}{15}} = \frac{4}{7}; \qquad 7x = 2 - 4x; \qquad x = \frac{2}{11}.$$

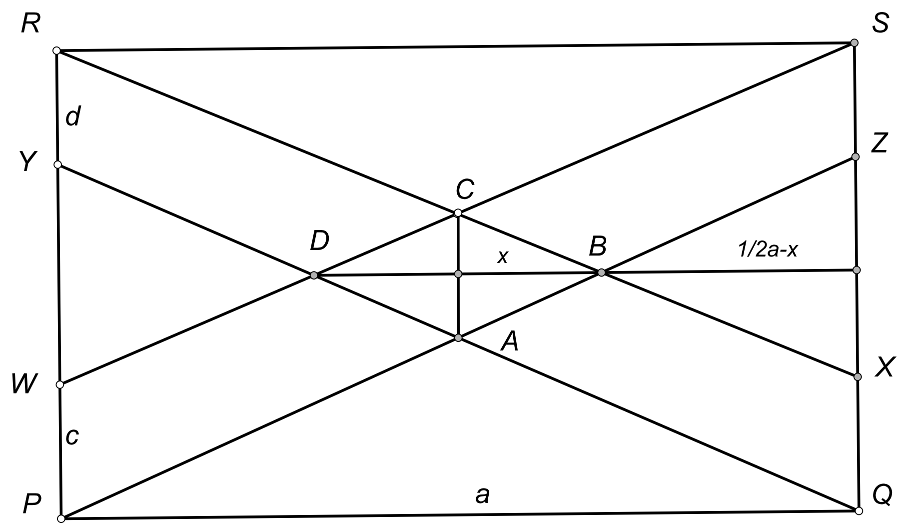
Ponieważ $x$ jest połową $|BD|$, więc $|BD| = \frac{4}{11}$.

Zwracam uwagę, że od początku milcząco korzystaliśmy z symetrii względem prostej łączącej środki boków $PQ$ i $RS$ kwadratu. Z faktu, że pary punktów $W, X$ i i $Y, Z$ są symetryczny względem tej prostej tak samo jak odpowiednie wierzchołki kwadratu wynika, że $A, C$ należą do tej prostej i $x$ jest połową $BD$. Dostrzeżenie symetrii może być kluczem do znalezienia rozwiązań wielu zadań z geometrii!

Zadanie bez istotnego zwiększenia stopnia trudności można uogólnić zastępując kwadrat prostokątem i przyjmując dowolne długości odcinków odkładanych na jego bokach. Istotne jest tylko zachowaniu kluczowej symetrii, a rozwiązanie da się powtórzyć praktycznie bez zmian.

**Uogólnienie zadania 4.**

Przedstawiony na rysunku prostokąt ma boki długości $|PQ| = a$ i $|QS| = b$, $|PW| = |QX| = c$ oraz $|SZ| = |RY| = d$. Oblicz długości przekątnych czworokąta $ABCD$. Ponieważ wszystkie




zależności opisane w rozwiązaniu zadania 4 pozostają bez zmiany przyjrzyjmy się tylko nowym rachunkom. Odległości $C$ i $A$ odpowiednio od $RS$ i $PQ$ wynoszą odpowiednio $\frac{1}{2}(b-c)$ i $\frac{1}{2}(b-d)$ i stąd $|AC| = b - \frac{1}{2}(b-c) - \frac{1}{2}(b-d) = \frac{1}{2}(c+d)$. Odcinek $XZ$ ma długość $b-c-d$ i dostajemy proporcję:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}a - x} = \frac{\frac{1}{2}(c+d)}{b-c-d}.$$

Stąd

$$(b-c-d)\cdot x = \frac{1}{4}a\cdot(c+d) - \frac{1}{2}(c+d)\cdot x;$$

$$4(b-c-d)\cdot x = a\cdot(c+d) - 2(c+d)\cdot x;$$

$$(4b-2c-2d)\cdot x = a\cdot(c+d);$$

$$x = \frac{a\cdot(c+d)}{4b-2c-2d};$$

$$|BD| = \frac{a\cdot(c+d)}{2b-c-d}.$$