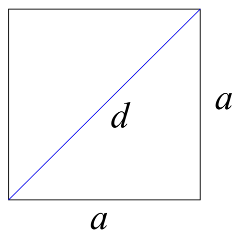
Artur Woike
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie
Joanna Woike
Niepubliczna Szkoła Absolwent w Olsztynie

Paradoks przekątnej i liczba π

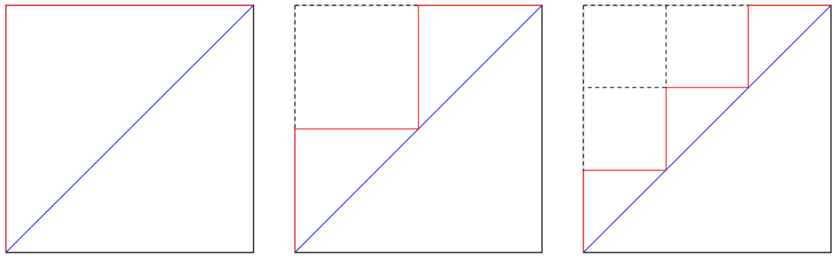
Rozważmy kwadrat o boku długości $a = 1$ i jego przekątną.



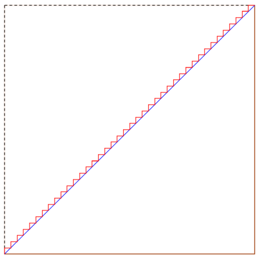
Długość przekątnej naszego kwadratu możemy obliczyć na przykład za pomocą twierdzenia Pitagorasa:

$$d^2 = a^2 + a^2,$$
$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2,$$
$$d = \sqrt{2}.$$

Przyjrzyjmy się teraz następującej konstrukcji:
— przybliżamy przekątną kwadratu za pomocą łamanej schodkowej zbudowanej z n schodków ($n \geqslant 1$);
— naszą łamaną zaczynamy budować w lewym dolnym rogu kwadratu i używamy do tego tylko dwóch rodzajów odcinków:
  — pionowe odcinki „skierowane” do góry;
  — poziome odcinki „skierowane” w prawo.
— każdy elementarny odcinek naszej łamanej ma taką samą długość.



Popatrzmy, co dzieje się z naszą łamaną, kiedy zwiększamy n, czyli liczbę schodków.



Widzimy, że wraz ze zwiększaniem liczby schodków łamana zaczyna coraz bardziej przypominać przekątną naszego kwadratu.

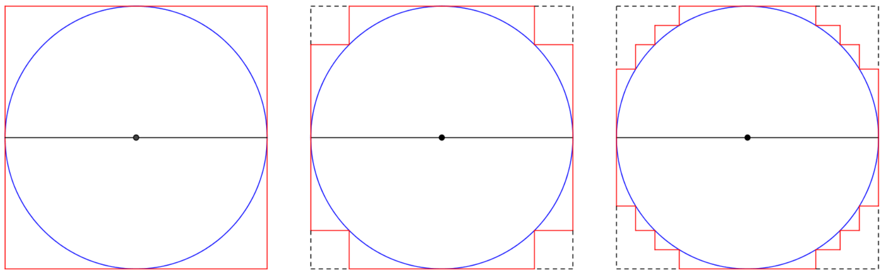
W takim razie, czy długość tak skonstruowanej łamanej również będzie się zbliżała do długości przekątnej $d = \sqrt{2}$? Spróbujmy teraz odpowiedzieć na to pytanie. Zauważmy, że dla ustalonej liczby schodków n nasza łamana zawsze jest zbudowana z n pionowych oraz n poziomych odcinków o długości $\frac{1}{n}$ każdy. Zatem dla dowolnego n długość łamanej wynosi $n\frac{1}{n} + n\frac{1}{n} = 2$. Gdyby przekątna i łamana miały takie same długości, to musiałoby zachodzić $\sqrt{2} = 2$. Jednakże $\sqrt{2} \approx 1,41$, bowiem $1,41^2 = 1,9881 \approx 2$. Zatem długość naszej łamanej jest zawsze różna od długości przekątnej kwadratu, pomimo tego, że dla dużych wartości n łamana zaczyna coraz bardziej przypominać przekątną. I właśnie to zjawisko jest nazywane przez matematyków *paradoksem przekątnej.*

Analogiczne zjawisko występuje, gdy próbujemy przybliżać wartość π. Przypomnijmy, że liczba π jest stosunkiem długości okręgu do długości jego średnicy. Teraz rozważmy następującą konstrukcję:

— rysujemy kwadrat o boku długości 1;

— w kwadrat wpisujemy okrąg o średnicy długości 1;

— analogicznie, jak dla paradoksu przekątnej, okrąg przybliżamy zamkniętą łamaną schodkową.



1

W naszym przypadku, ponieważ średnica okręgu ma długość 1, więc liczba π jest równa po prostu długości rozpatrywanego okręgu. Podobnie, jak dla paradoksu przekątnej, możemy zobaczyć, że dla dużej liczby schodków nasza zamknięta łamana zaczyna przypominać okrąg. Jednakże, niezależnie od liczby schodków, długość takiej łamanej jest zawsze równa 4.

Czy to oznacza, że obwód rozpatrywanego koła o średnicy długości 1 jest równy 4, a co za tym idzie $\pi = 4$? Oczywiście, nie! W dalszym ciągu $\pi \approx 3,14$, tak jak uczymy się na lekcjach matematyki w szkole. W tym przypadku paradoks wynika z tego, że nie wszystkie wierzchołki rozpatrywanej łamanej leżą na okręgu.

Drogi Czytelniku, na koniec ciekawostka. Pod koniec XIX w. niejaki E. J. Goodwin (używając innej fałszywej argumentacji) próbował opatentować w amerykańskim stanie Indiana nową wartość liczby π, a mianowicie $\pi = 4$. W 1897 r. jego wniosek uzyskał kolejno pozytywne opinie Stanowej Komisji ds. Obszarów Bagiennych, Stanowej Komisji Edukacji (zadziwiające, nieprawdaż?), senatu stanu Indiana oraz Senackiej Komisji ds. Abstynencji, jak również poparcie lokalnej prasy. Jedynie przypadek sprawił, że przed ostatecznym głosowaniem Ogólnego Zgromadzenia stanu Indiana w sprawie przyznania patentu na nową wartość liczby π, jeden z członków senatu przedstawił projekt wniosku patentowego profesorowi matematyki C. A. Waldo oraz zaproponował spotkanie z jego autorem. Prof. Waldo zasugerował wówczas, że „poznał już tylu szalonych ludzi, że jeden więcej nie zrobi mu różnicy”[1]. Negatywna opinia profesora spowodowała upadek poparcia dla wniosku Goodwin'a. I dzięki temu legalnie obowiązującą wartością liczby π jest w dalszym ciągu $3,14159\ldots$

[1] David Singmaster, „The Legal Values of Pi”, *The Mathematical Intelligencer*, t. 7, nr 2, 1985, s. 70.

Literatura

[1] S. M. Blinder, „Pi=4?”, *Wolfram Demonstrations Projects*, http://demonstrations.wolfram.com/Pi4/, 2017-02-17.

[2] W. Dunham, „Matematyczny wszechświat”, Zysk i S-ka Wydawnictwo, Poznań 2001.

[3] D. Singmaster, „The Legal Values of Pi”, *The Mathematical Intelligencer*, t.7, nr 2, 1985.

[4] E. W. Weisstein, „Diagonal Paradox”, *MathWorld–A Wolfram Web Resource*, http://mathworld.wolfram.com/DiagonalParadox.html, 2017-02-17.

[5] „The Diagonal Paradox”, *The Freaky World of Math*, http://freakymath.blogspot.com/2011/11/diagonal-paradox.html, 2017-02-17.