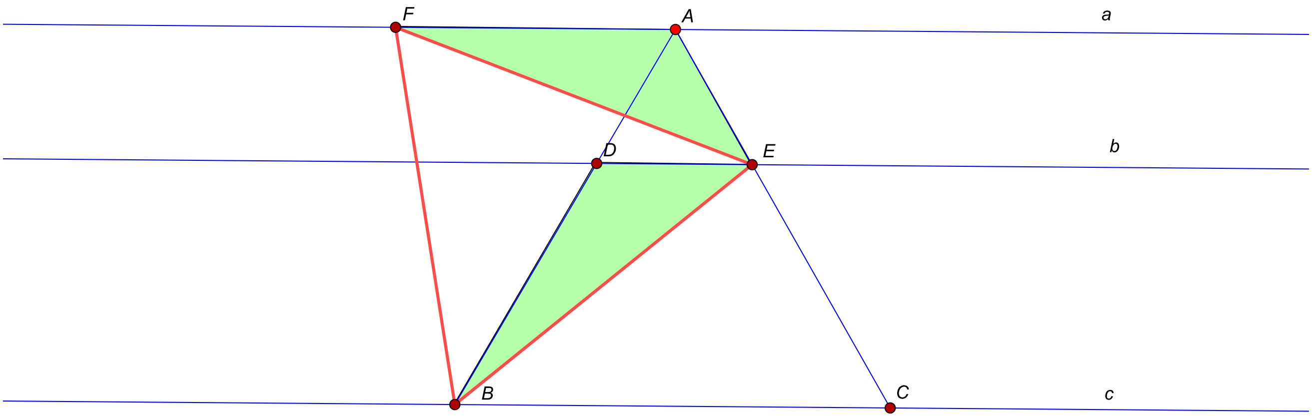
Wpisywanie trójkąta równobocznego w proste równoległe

Andrzej Matraś, Wydział Matematyki i Informatyki UWM

Zadanie konstrukcyjne. W dane trzy proste równoległe a, b, c wpisać trójkąt równoboczny w ten sposób, że na każdej z prostych leży jeden jego wierzchołek. Ponieważ nic nie zakładamy o położeniu prostych, więc należy przyjąć, że nie jest to żadne położenie szczególne, czyli że proste są różne, a środkowa z nich znajduje się w różnych odległościach od pozostałych. Przyjmijmy, dla ustalenia uwagi, że tą środkową jest b.

Najpierw przedstawię zaskakujące rozwiązanie znalezione przez Piotra Krzywickiego, ucznia XII Liceum Ogólnokształcącego w Olsztynie.

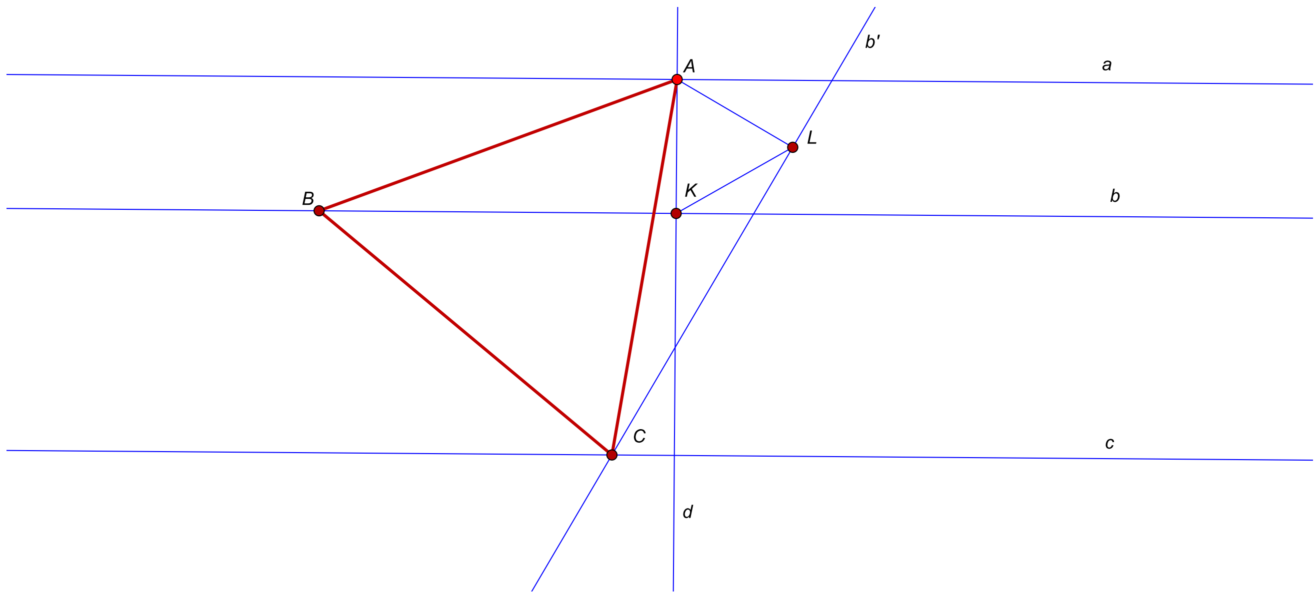
Rozwiązanie I. Zaczynamy od narysowania trójkąta ABC, którego wierzchołki BC znajdują się na prostej c, a wierzchołek A na prostej a (rys.). Konstrukcja takiego trójkąta nie jest trudna ponieważ wystarczy przez dowolny punkt A prostej a poprowadzić prostą pod kątem $60°$ i przeciąć ją z prostą c. Boki AB i AC tego trójkąta przecinają prostą b odpowiednio w punktach D i E. Okazuje się, że odcinek BE można przyjąć za bok szukanego trójkąta. Trójkąt równoboczny o tej podstawie narysowany w stronę prostej a ma trzeci wierzchołek F właśnie na tej prostej. Poprawności konstrukcji dowodzimy za pomocą trójkątów zaznaczonych na rysunku kolorem zielonym. Ponieważ $|\measuredangle FEA| = 60° - |\measuredangle FED| = |\measuredangle DEB|$, więc trójkąt BED przystaje do trójkąta FEA (cecha bkb). Stąd $|\measuredangle EAF| = |\measuredangle EDB| = 120°$. Wynika stąd, że $F \in a$.



Przedstawię jeszcze drugie, pouczające rozwiązanie, które wykorzystuje obrót o $60°$.

Rozwiązanie II. Prostą b obracamy wokół punktu $A \in a$ o $60°$. Punkt C przecięcia prostych c i b jest drugim wierzchołkiem szukanego trójkąta. Rzeczywiście, obrót wokół A o kąt przeciwny przywraca prostej b wyjściowe położenie i punkt B, który jest obrazem punktu C w tym obrocie znajduje się na b. Obrót prostej b przeprowadzamy następująco. Przez a prowadzimy prostą d prostopadłą do wyjściowych prostych i przecinamy ją z b (w punkcie K). Kontrujemy trójkąt równoboczny AKL. Przez L prowadzimy prostą b' prostopadłą do AL. Ponieważ L jest obrazem K w obrocie wokół A o $60°$, więc b' jest obrazem b.

Skorzystaliśmy tu z łatwej do odkrycia, ale bardzo przydatnej własności obrotu o kąt $60°$, a mianowicie - *środek obrotu o* $60°$*, dowolny różny od niego punkt i jego obraz tworzą*



trójkąt równoboczny. Można ją wykorzystać w wielu zadaniach dotyczących trójkątów równobocznych. Spróbujcie zmierzyć się z następującym:

Zadanie. Trójkąty równoboczne ABC i BDE są położone jak na poniższym rysunku. Wykazać, że punkt B oraz środki odcinków AE i CD tworzą trójkąt równoboczny.