Pole czworokąta

Wiktoria Gorlo, klasa 1a, I Liceum Ogólnokształcące im. Jana Kochanowskiego w Olecku pod kierunkiem Elżbiety Guziejko

Artykuł powstał na podstawie wykładu dr hab. Andrzeja Matrasia, prof. UWM dla uczniów I LO w Olecku wygłoszonego 15 marca 2018r.

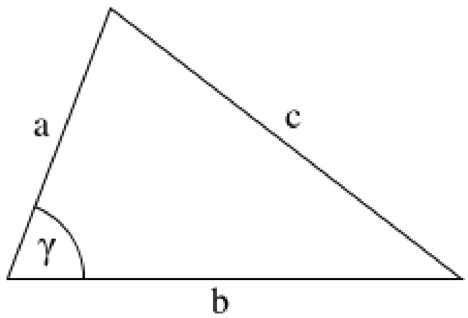
Potrzebne informacje:

- Pole trójkąta : $P_{\Delta} = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\alpha}{2}$

- Wzory skróconego mnożenia : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

  $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Twierdzenie cosinusów :



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

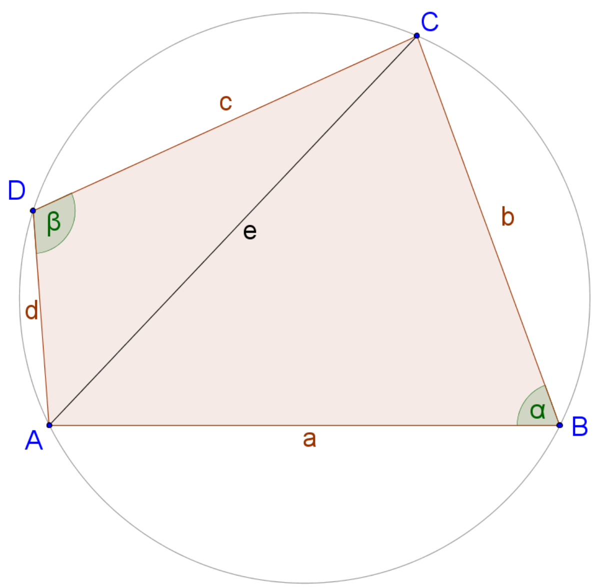
- Wzór na jedynkę trygonometryczną : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

- Wzory redukcyjne: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

- Twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg: suma przeciwległych kątów jest równa 180°.

- Twierdzenie o czworokącie opisanym na okręgu: sumy przeciwległych boków są sobie równe.

I. Czy pole czworokąta może wyrażać się przy pomocy boków?



Czworokąt ABCD jest wpisany w okrąg, więc $\beta = 180^\circ - \alpha$

1. Pole czworokąta ABCD wpisanego w okrąg możemy wyrazić wzorem:

$$P = \frac{ab \cdot \sin\alpha}{2} + \frac{cd \cdot \sin(180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{ab \cdot \sin\alpha}{2} + \frac{cd \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{ab + cd}{2} \cdot \sin\alpha$$

2. Z twierdzenia cosinusów zastosowanego w trójkątach ACD i ABC do wyznaczenia przekątnej AC otrzymujemy:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$
$$a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha = c^2 + d^2 + 2cd \cdot \cos\alpha$$
$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab + cd) \cdot \cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

3.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\right)^2$$
$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)^2}$$

4. $$P=\frac{ab+cd}{2}\cdot\sin\alpha$$

$$P^2=\frac{(ab+cd)^2}{4}\cdot\sin^2\alpha=\frac{(ab+cd)^2}{4}\cdot\left[1-\frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(ab+cd)^2}\right]=$$

$$=\frac{(ab+cd)^2}{4}\cdot\left[\frac{4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(ab+cd)^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\left[[2(ab+cd)]^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\left[2(ab+cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)\right]\cdot\left[2(ab+cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)\right]=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot(c^2+d^2+2cd-a^2-b^2+2ab)\cdot(a^2+b^2+2ab-c^2-d^2+2cd)=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\left[(c+d)^2-(a-b)^2\right]\cdot\left[(a+b)^2-(c-d)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot(c+d-a+b)\cdot(c+d+a-b)\cdot(a+b-c+d)\cdot(a+b+c-d)$$

Niech p oznacza połowę obwodu czworokąta, wówczas $a+b+c+d=2p$

$$c+d-a+b=a+b+c+d-2a=2p-2a=2(p-a)$$

$$c+d+a-b=a+b+c+d-2b=2p-2b=2(p-b)$$

Analogicznie rozpisując

$$a+b-c+d=2(p-c)$$

$$a+b+c-d=2(p-d)$$

otrzymujemy, że

$$P^2=\frac{1}{16}\cdot2(p-a)\cdot2(p-b)\cdot2(p-c)\cdot2(p-d)=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$

$P=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ - wzór ten nosi nazwę „wzoru Brahmagupty” i pozwala obliczyć pole czworokąta wpisanego w okrąg o bokach długości a, b, c, d.

II. Kiedy czworokąt ma największe pole?

Pole dowolnego czworokąta (twierdzenie Bretschneidera) możemy wyrazić wzorem

$P = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cdot \cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2}}$, gdzie α, β są miarami przeciwległych kątów w czworokącie.

Pole jest największe, gdy

$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha+\beta = 180^\circ$, a zatem czworokąt jest wpisany w okrąg.

Wniosek: Z czworokątów o bokach: a, b, c, d największe pole ma czworokąt wpisany w okrąg.

III. W jaki sposób można otrzymać wzór Herona?

Jeżeli we wzorze na pole czworokąta $P = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ przyjmiemy, że bok $d = 0$, otrzymamy wzór Herona na pole trójkąta

$$P_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

IV. Jaki jest wzór na pole czworokąta wpisanego w okrąg i opisanego na okręgu?

Korzystając z wcześniej wyprowadzonego wzoru na kwadrat pola czworokąta wpisanego w okrąg

$$P^2 = \frac{1}{16} \cdot (a+b+c-d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(-a+b+c+d)$$

i uwzględniając w nim warunek wynikający z twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu: $a+c = b+d$, przekształcamy wyrażenia w nawiasach

$$a+b+c-d = (a+c)+b-d = (b+d)+b-d = 2b$$

$$a-b+c+d = (a+c)-b+d = (b+d)-b+d = 2d$$

$$a+b-c+d = a-c+(b+d) = a-c+(a+c) = 2a$$

$$-a+b+c+d = -a+c+(b+d) = -a+c+(a+c) = 2c$$

i otrzymujemy wzór $P^2 = \frac{1}{16} \cdot 2b \cdot 2d \cdot 2a \cdot 2c = abcd \quad \Rightarrow \quad P = \sqrt{abcd}$.

Wniosek: wzór na pole czworokąta wpisanego w okrąg i opisanego na okręgu wyraża się wzorem: $P = \sqrt{abcd}$.