Rekurencja

Janusz Karkut, Akademicki Zespół Placówek Oświatowych w Fijewie (Lubawa)

Zacznijmy od przykładu.

Załóżmy, że pracujesz dla firmy parkingowej. Każdy z klientów jeździ samochodem W, samochodem S lub P. Szef powiedział ci, że musisz zarezerwować miejsca postojowe na parkingu i oznaczyć je jako W, S oraz P. Samochody W i samochody S zajmują po 2 miejsca postojowe, podczas gdy samochody P wymagają tylko jednego.

(a) Pole parkingowe ma 12 miejsc. Na ile sposobów możesz przydzielić miejsca?

(b) A jeśli pole parkingowe ma 500 miejsc, to na ile sposobów możesz to zrobić ?

Rozwiążmy ten problem.

Zauważmy, że liczba 12 nie ma tu żadnego szczególnego znaczenia.
Niech p_n oznacza liczbę sposobów przydzielenia miejsc parkingowych, na którym jest *n* stanowisk postojowych. Jeśli przydzielimy jedno miejsce dla *P*, możemy przydzielić pozostałe $n-1$ miejsc na p_{n-1} sposobów, jeśli zaś przydzielimy pierwsze dwa miejsca dla samochodu *W*, to pozostałe $n-2$ miejsc możemy przydzielić na p_{n-2} sposobów. Podobnie, jeśli przydzielimy pierwsze dwa miejsca dla samochodu *S*, to pozostałe $n-2$ miejsc możemy przydzielić również na p_{n-2} sposobów. Liczbę sposobów przedzielenia miejsc na parkingu opisuje więc wór rekurencyjny

$$\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_2 = 3 \\ p_n = p_{n-1} + 2p_{n-2}. \end{cases}$$

Wypiszmy kolejne wyrazy tego ciągu, aż do p_{12}.

$$p_3 = p_2 + 2p_1 = 3 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$p_4 = p_3 + 2p_2 = 5 + 2 \cdot 3 = 11$$

$$p_5 = p_4 + 2p_3 = 11 + 2 \cdot 5 = 21$$

$$p_6 = p_5 + 2p_4 = 21 + 2 \cdot 11 = 43$$

$$p_7 = p_6 + 2p_5 = 43 + 2 \cdot 21 = 85$$

$$p_8 = p_7 + 2p_6 = 85 + 2 \cdot 43 = 171$$

$$p_9 = p_8 + 2p_7 = 171 + 2 \cdot 85 = 341$$

$$p_{10} = p_9 + 2p_8 = 341 + 2 \cdot 171 = 683$$

$$p_{11} = p_{10} + 2p_9 = 683 + 2 \cdot 341 = 1365$$

$$p_{12} = p_{11} + 2p_{10} = 1365 + 2 \cdot 683 = 2731$$

Ufff…

Poradziliśmy sobie z a), pora na b).

Czy potrafimy znaleźć wzór analityczny tego ciągu?

Mając wzór (*) $p_n = p_{n-1} + 2p_{n-2}$, przyjmijmy $p_n = c^n$.

Wówczas równanie (*) ma postać:

$$c^n = c^{n-1} + 2c^{n-2}.$$

Jeśli $c \neq 0$, to dzieląc obie strony przez c^{n-2}, otrzymujemy równanie:

$$c^2 - c - 2 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są liczby $c_1 = 2, c_2 = -1$.

Pisząc $p_n = \lambda_1 c_1^n + \lambda_2 c_2^n = \lambda_1 2^n + \lambda_2 (-1)^n$ i uwzględniając warunki: $p_1 = 1$ i $p_2 = 3$, otrzymujemy:

$$\begin{cases} p_1 = 1 = 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ p_2 = 3 = 4\lambda_1 + \lambda_2. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ, otrzymujemy:

$$\lambda_1 = \frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}.$$

Zatem

$$\boldsymbol{p_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n}$$

i

$$p_{500} = \frac{2}{3} \cdot 2^{500} + \frac{1}{3} = \frac{2^{501} + 1}{3}.$$

To ogromna liczba, gdyż już dla $n = 50$ i $n = 100$, mamy:

```
p_n =2/3 2^n + 1/3 (-1)^n
```

→ $p_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n$

```
p_n = 1 / 3 (-1)^n + 2 / 3 * 2^n
```

Podstaw, n=50: $p_n = 750599937895083$

```
p_n = 1 / 3 (-1)^n + 2 / 3 * 2^n
```

Podstaw, n=100: $p_n = 845100400152152934331135470251$

W *Podstawie programowej* znajdujemy przykład (str. 289) ciągu zdefiniowanego rekurencyj-nie:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

Początkowe wyrazy tego ciągu są następujące:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

Są to liczby, zwane **liczbami Fibonacciego**.

Jaka jest definicja analityczna tego ciągu? Powtórzmy metodę zastosowaną w poprzednim przykładzie.

Przyjmując $a_n = c^n$, piszemy równanie:

$$c^{n+2} = c^{n+1} + c^n.$$

Dzieląc obie strony przez c^n, otrzymujemy:

$$c^2 - c - 1 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są liczby: $c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $c_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Pisząc $a_n = xc_1^n + yc_2^n$ i uwzględniając warunki początkowe, otrzymujemy:

$$\begin{cases} 1 = xc_1 + yc_2 \\ 1 = xc_1^2 + yc_2^2 \end{cases}$$

Podstawiając c_1 i c_2 i mnożąc obie strony przez 2 i 4 odpowiednio, otrzymujemy:

$$\begin{cases} 2 = x\left(1+\sqrt{5}\right) + y\left(1-\sqrt{5}\right) \\ 4 = x\left(1+\sqrt{5}\right)^2 + y\left(1-\sqrt{5}\right)^2 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest następujące:

CAS

1	2=x(1+sqrt(5))+y(1-sqrt(5)) → $2 = x\left(\sqrt{5}+1\right) + y\left(-\sqrt{5}+1\right)$
2	4=x(1+sqrt(5))^2+y(1-sqrt(5))^2 → $4 = x\left(2\sqrt{5}+6\right) + y\left(-2\sqrt{5}+6\right)$
3	{$1, $2} Rozwiąż: $\left\{\left\{x = \frac{\sqrt{5}}{5}, y = -\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}\right\}$

Zapiszmy $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Wówczas

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

a po przekształceniach:

$$\boldsymbol{a_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}}.$$

Czy to działa?

((1+sqrt(5))^n-(1-sqrt(5))^n)/(2^n*sqrt(5))

Podstaw, n=1: **1**

((1+sqrt(5))^n-(1-sqrt(5))^n)/(2^n*sqrt(5))

Podstaw, n=10: **55**

((1+sqrt(5))^n-(1-sqrt(5))^n)/(2^n*sqrt(5))

Podstaw, n=12: **144**

Jak widać, bez zarzutu!

Postawmy teraz pytanie ogólne: Jak utworzyć **wzór analityczny** dla danego ciągu rekurencyjnego?

W poprzednich przykładach użyliśmy następującej metody ogólnej, którą stosujemy w przypadku ciągów rekurencyjnych typu

$$a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}.$$

Takie rekurencje nazywa się **rekurencjami liniowymi**, ponieważ każdy wyraz rekurencji jest wyrażeniem postaci a_n lub a_{n-k} pomnożonym przez stałą.

Najpierw szukamy rozwiązań w postaci c^n, co prowadzi do uzyskania równania

$$c^n = pc^{n-1} + qc^{n-2}.$$

Dzieląc obie strony tego równania przez c^{n-2}, otrzymujemy równanie

$$c^2 - pc - q = 0,$$

nazywane **równaniem charakterystycznym** rekurencji.

Rozwiązujemy je, by uzyskać pierwiastki c_1 i c_2.

Jeśli $c_1 \neq c_2$, piszemy równanie

$$\boldsymbol{a_n = \lambda_1 c_1^n + \lambda_2 c_2^n}$$

dla pewnych stałych λ_1 i λ_2. Jest to **rozwiązanie ogólne** rekurencji.

Jeśli $c_1 = c_2$, piszemy równanie

$$\boldsymbol{a_n = \lambda_1 c^n + \lambda_2 n c^n}.$$

Pozostaje rozwiązać je w szczególnym przypadku, tzn. przyjmując warunki początkowe.

Pokażemy to na następującym przykładzie.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \end{cases}$$

Niech $a_n = c^n$. Wówczas

$$c^n = c^{n-1} + 6c^{n-2}.$$

Dzieląc obie strony tego równania przez c^{n-2}, otrzymujemy:

$$c^2 - c - 6 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są liczby $c_1 = 3$ i $c_2 = -2$.

Dla pewnych α_1 i α_2 mamy zatem:

$$a_n = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot (-2)^n.$$

Ponieważ $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$, więc

$$\begin{cases} 3\alpha_1 - 2\alpha_2 = 1 \\ 9\alpha_1 + 4\alpha_2 = 2, \end{cases}$$

skąd

$$\alpha_1 = \frac{4}{15}, \alpha_2 = -\frac{1}{10}.$$

Zatem

$$\boldsymbol{a_n = \frac{4}{15} \cdot 3^n - \frac{1}{10} \cdot (-2)^n}.$$

Zgadza się? Oczywiście!

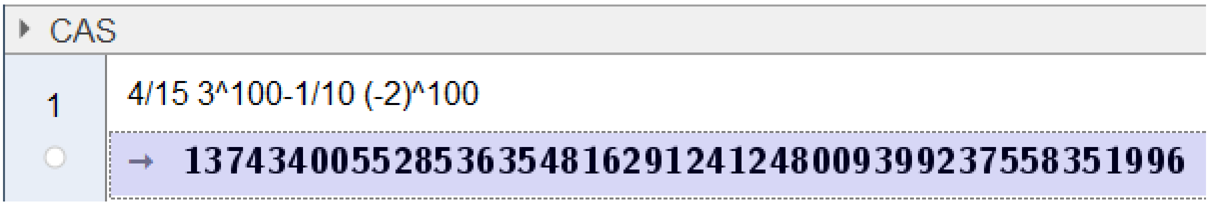
Policzmy a_3 ze wzoru rekurencyjnego:

$$a_3 = a_2 + 6a_1 = 8.$$

Ze wzoru analitycznego otrzymujemy to samo:

$$\frac{4}{15} \cdot 3^3 - \frac{1}{10} \cdot (-2)^3 = \frac{4}{15} \cdot 27 - \frac{1}{10} \cdot (-8) = \frac{36}{5} + \frac{4}{5} = \frac{40}{5} = 8.$$

Setnym wyrazem jest zatem



Rozważmy jeszcze jeden przykład.

Znajdź wzór analityczny dla ciągu rekurencyjnego określonego dla $n > 2$ wzorem

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}. \end{cases}$$

Równanie charakterystyczny ma tu postać

$$c^2 - 4c + 4 = 0.$$

Ma ono dwukrotny pierwiastek $c = 2$.

W takim przypadku rozwiązaniem ogólnym jest

$$\lambda_1 c^n + \lambda_2 n c^n.$$

Podstawiając $a_1 = 1$ i $a_2 = 3$, otrzymujemy:

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 3 = 4\lambda_1 + 8\lambda_2. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu są liczby: $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ i $\lambda_2 = \frac{1}{4}$.

Wzór analityczny ma zatem postać:

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{4} \cdot 2^n + \frac{1}{4} \cdot n \cdot 2^n = \frac{1}{4}(n+1) \cdot 2^n}.$$

Na koniec trzy zadania.

1. Wyznacz wzór analityczny dla ciągu rekurencyjnego

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_n = -2a_{n-1} + 15a_{n-2}. \end{cases}$$

Odp. $a_n = -\frac{1}{8}(-5)^n + \frac{1}{8} \cdot 3^n$.

2. Wyznacz wzór analityczny dla ciągu rekurencyjnego

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 4 \\ a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}. \end{cases}$$

Odp. $a_n = (n+3) \cdot 3^{n-1}$.

3. Wyznacz wzór analityczny dla ciągu rekurencyjnego

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}. \end{cases}$$

Odp. $a_n = 2^n - 1$.