O pewnych związkach złotej liczby z ciągiem Fibonacciego

Grażyna Ciecierska, Wydział Matematyki i Informatyki UWM

Pojęciem matematycznym związanym z tzw. złotą liczbą jest ciąg Fibonacciego. Dwa początkowe wyrazy tego ciągu to wartości 1 i 1, natomiast każdy następny wyraz jest sumą dwóch go poprzedzających. Pierwsza osiemnastka wyrazów tego nieskończonego ciągu jest następująca:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ 987,\ 1597,\ 2584\,.$$

Dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n, oznaczmy n–ty wyraz ciągu Fibonacciego symbolem a_n (w szczególności, $a_3 = 2$, $a_{15} = 610$). Poza opisem słownym, od którego rozpoczęliśmy, ciąg ten możemy określić - za średniowiecznym, włoskim matematykiem Leonardo z Pizy, znanym jako Fibonacci - przez podanie wzoru rekurencyjnego :

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1\,;\ \ a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \ \text{ dla dowolnej liczby naturalnej } n\,.$$

Łatwiej operować ogólnym wyrazem ciągu, jednak nie zawsze określenie takiego wyrazu jest możliwe czy proste. Na ogólną postać wyrazu ciągu Fibonacciego, podaną przez Jacquesa Bineta, trzeba było czekać ponad sześć wieków:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \tag{1}$$

Biorąc pod uwagę fakt, iż $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, równoważna postać wzoru (1) jest następująca:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Phi^n + \frac{(-1)^{n+1}}{\Phi^n}\right], \tag{2}$$

gdzie Φ oznacza złotą liczbę, tzn. $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Związek ciągu Fibonacciego ze złotą liczbą uwidacznia się, m.in., w tożsamościach opisujących kolejne potęgi złotej liczby. Odwołując się do geometrycznych, starożytnych źródeł pojęcia złotej liczby, a ściślej, do harmonicznego (wg Euklidesa) podziału odcinka, zapisujemy

$$\frac{\Phi}{1} = \frac{1}{\Phi - 1}\,. \tag{3}$$

Złoty stosunek (3) możemy przedstawić, równoważnie, jako

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0\,, \tag{4}$$

skąd wynika, iż

$$\Phi^2 = \Phi + 1\,. \tag{5}$$

Mnożąc (5), obustronnie, przez Φ, otrzymujemy

$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi\,. \tag{6}$$

Podobnie, obustronne mnożenie (6) przez Φ, prowadzi do

$$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2\,. \tag{7}$$

Postępując analogicznie, tzn. mnożąc za każdym razem obie strony równości przez Φ, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\Phi^5 &= \Phi^4 + \Phi^3 \\
\Phi^6 &= \Phi^5 + \Phi^4 \\
\Phi^7 &= \Phi^6 + \Phi^5 \\
\Phi^8 &= \Phi^7 + \Phi^6\,.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że uwzględnienie (5) pozwala na następujące przekształcenia powyższych potęg Φ:

$$\begin{aligned}
\Phi^3 &= (\Phi + 1) + \Phi = 2\Phi + 1 \\
\Phi^4 &= (2\Phi + 1) + (\Phi + 1) = 3\Phi + 2 \\
\Phi^5 &= (3\Phi + 2) + (2\Phi + 1) = 5\Phi + 3 \\
\Phi^6 &= (5\Phi + 3) + (3\Phi + 2) = 8\Phi + 5 \\
\Phi^7 &= (8\Phi + 5) + (5\Phi + 3) = 13\Phi + 8 \\
\Phi^8 &= (13\Phi + 5) + (8\Phi + 5) = 21\Phi + 13\,.
\end{aligned}$$

Zatem kolejne potęgi złotej liczby można wyrazić za pomocą kombinacji liczb Φ oraz 1, o współczynnikach będących sąsiednimi wyrazami ciągu Fibonacciego. Powyższe spostrzeżenie można sformułować w ogólniejszej, następującej postaci:

Twierdzenie 1. *Dla dowolnej liczby naturalnej n, $n > 1$, prawdziwa jest równość:*

$$\Phi^n = a_n \cdot \Phi + a_{n-1}\,. \tag{8}$$

Dowód. Wobec (5) oraz $a_1 = a_2 = 1$, uzyskujemy $\Phi^2 = a_2\Phi + a_1$, czyli równość (8) zachodzi dla $n = 2$. Załóżmy teraz, iż $n > 2$. Zatem, na mocy (2),

$$a_n\Phi + a_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Phi^n + \frac{(-1)^{n+1}}{\Phi^n}\right]\cdot\Phi + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Phi^{n-1} + \frac{(-1)^n}{\Phi^{n-1}}\right]. \tag{9}$$

Prawą stronę równości (9) można zapisać w następujący sposób:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Phi^{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{\Phi^{n-1}} + \Phi^{n-1} + \frac{(-1)^n}{\Phi^{n-1}}\right]. \tag{10}$$

Ponieważ $(-1)^{n+1} = -(-1)^n$, więc (10) jest postaci

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n+1} + \Phi^{n-1}\right). \tag{11}$$

Stąd, biorąc pod uwagę (9) oraz (11),

$$a_n\Phi + a_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\Phi^{n-1}\left(\Phi^2+1\right) . \tag{12}$$

Wobec $\Phi^2+1 = \frac{(\sqrt{5}+1)^2+4}{4} = \frac{10+2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{2} = \sqrt{5}\Phi$, prawa strona (9) przyjmuje wartość Φ^n , co kończy dowód. □

Odnotujmy jeszcze jeden związek między złotą liczbą i ciągiem Fibonacciego. Obliczmy iloraz dowolnie ustalonego wyrazu ciągu Fibonacciego przez poprzedzający go wyraz. Otrzymana liczba tym dokładniej przybliża złotą liczbę, im większy jest indeks ustalonego wyrazu, tzn.

$$\frac{a_4}{a_3} = 1,5, \quad \frac{a_5}{a_4} = 1,(6), \quad \frac{a_6}{a_5} = 1,6, \quad \frac{a_7}{a_6} = 1,625, \quad \frac{a_{11}}{a_{10}} = 1,61(81) .$$

Kolejne twierdzenie, podające uogólnienie zaobserwowanej powyżej zależności, możemy wysłowić w następujący sposób: granica ilorazów sąsiednich wyrazów ciągu Fibonacciego jest złotą liczbą.

Twierdzenie 2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \Phi \tag{13}$$

Dowód. Oznaczmy, symbolem g, granicę ciągu o wyrazie ogólnym $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Wobec reguły rekurencyjnej dla ciągu Fibonacciego, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ dla $n > 1$. Zatem

$$g = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right) . \tag{14}$$

Korzystając z własności działań arytmetycznych na granicach ciągów zbieżnych, możemy zapisać

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\right) = 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}} . \tag{15}$$

Na mocy (14) oraz (15), otrzymujemy $g = 1 + \frac{1}{g}$, czyli $g^2 - g - 1 = 0$. Biorąc pod uwagę (4) i dodatniość g, wnioskujemy, iż $g = \Phi$. □

Podane twierdzenia dostarczają matematycznych narzędzi do badania zależności między złotą liczbą, towarzyszącą od wieków różnym przejawom przyrody i sztuki, i liczbami Fibonacciego. Umożliwiają dalsze odkrywanie powiązań abstrakcyjnego świata liczb z fizyczną rzeczywistością. Do takich odkryć zachęcamy czytelnika, proponując - na początek - rozwiązanie poniższych zadań.

Zadanie 1. Znaleźć granicę ciągu $(a_n)_{n\in N}$, określonego wzorem rekurencyjnym:

$$a_1 = 1\,; \;\; a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \;\text{ dla dowolnej liczby naturalnej } n\,.$$

Zadanie 2. W oparciu o cztery kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego, znaleźć takie liczby naturalne a oraz c , że $(a, 546, c)$ stanowi trójkę pitagorejską, tzn. $a^2 + 546^2 = c^2$.
Wskazówka. $546 = 2 \cdot 13 \cdot 21$