O minimach dwóch ważnych funkcji. Część pierwsza.

Elżbieta Guziejko, I Liceum Ogólnokształcące w Olecku
Zbigniew Paprzycki, Wydział Matematyki i Informatyki UWM

W tej części artykułu zbadamy minimum funkcji postaci $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i |x - x_i|$ o dodatnich współczynnikach $a_i > 0$ i ustalonych wartościach rzeczywistych $x_i \in R$ dla $i = 1,...,n$, gdzie symbol $\sum_{i=1}^{n} a_i |x - x_i|$ oznacza sumowanie $a_1|x - x_1| + a_2|x - x_2| + ... + a_n|x - x_n|$.

Przede wszystkim zauważmy, że każdą wartość bezwzględną możemy zapisać dla $x \le x_i$ w sposób $a_i|x - x_i| = -a_i(x - x_i)$, a dla $x > x_i$ jako $a_i|x - x_i| = a_i(x - x_i)$.

Skoro zapis wartości bezwzględnych zależy od tego, czy argument x jest większy, czy mniejszy od x_i, to warto jest ustawić wartości bezwzględne tak, aby $x_1 < x_2 < .... < x_n$. Wtedy natychmiast otrzymamy, zależnie w którym przedziale znajduje się argument x, ile wartości bezwzględnych pozostaje bez zmiany znaku, a w ilu znak zmienia się na przeciwny.

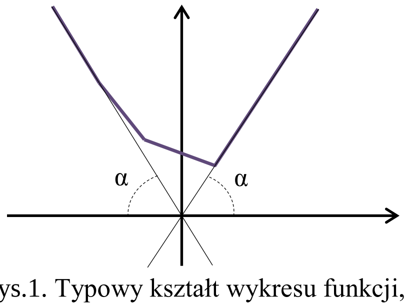
Zacznijmy od analizy wyznaczania minimów sum wartości bezwzględnych w dwóch prostych przypadkach.

Przypadek 1. Wyznacz, dla jakiego argumentu funkcja $f(x) = |x + 2| + 3|x - 1| + |x + 1|$ osiąga najmniejszą wartość.

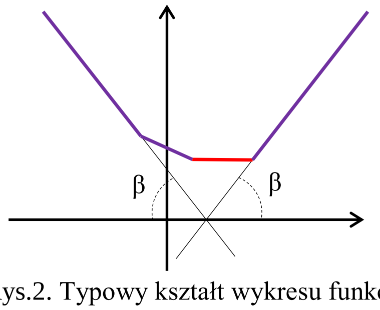
Rozwiązanie. Minimum wyznaczymy na podstawie wykresu funkcji. Przede wszystkim zapiszemy funkcję tak, aby miejsca zerowe w kolejnych wartościach bezwzględnych były ustawione rosnąco: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$ i $x_3 = 1$. Wtedy

$$f(x) = |x+2| + 3|x-1| + |x+1| = |x-(-2)| + |x-(-1)| + 3|x-1| = \begin{cases} -5x & dla \quad x \in (-\infty, -2\rangle \\ -3x + 4 & dla \quad x \in (-2, -1\rangle \\ -x + 6 & dla \quad x \in (-1, 1\rangle \\ 5x & dla \quad x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Korzystając z wykresu (rys. 1) widzimy, że funkcja osiąga najmniejszą wartość dla argumentu $x = 1$, gdy rosnące współczynniki kierunkowe poszczególnych odcinków linii prostych: $b_1 = -5$, $b_2 = -3$, $b_3 = -1$, $b_4 = 5$ zmieniają się z ujemnych na dodatnie. Jest to dość oczywiste, bowiem przy ujemnych współczynnikach funkcja maleje, przy dodatnich rośnie.



Rys.1. Typowy kształt wykresu funkcji, gdzie wszystkie $b_k \neq 0$.



Rys.2. Typowy kształt wykresu funkcji, gdzie $b_3 = 0$.

Przypadek 2. Wyznacz, dla jakiego argumentu funkcja $f(x)=|x-1|+2|x-3|+|x+1|$ osiąga najmniejszą wartość.

Rozwiązanie. Postępują analogicznie funkcję $f(x)$ zapiszemy następująco:

$$f(x)=|x-1|+2|x-3|+|x+1|=|x-(-1)|+|x-1|+2|x-3|=\begin{cases}-4x+6 & dla \quad x\in(-\infty,-1\rangle\\ -2x+8 & dla \quad x\in(-1,1\rangle\\ 6 & dla \quad x\in(1,3\rangle\\ 4x-6 & dla \quad x\in(3,+\infty)\end{cases}$$

Z wykresu widzimy (rys.2), że funkcja osiąga najmniejszą wartość w każdym punkcie przedziału $\langle 1,3\rangle$, w którym współczynnik kierunkowy jest równy zero $(b_3=0)$.

Warto zwrócić uwagę na zewnętrzne odcinki wykresu leżące na liniach o tym samym miejscu zerowym.

W ogólnym przypadku dowolnej sumy wartości bezwzględnych:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i|x-x_i| \ , \quad x_1<x_2<\ldots<x_n, \quad a_i>0 \text{ dla } i=1,\ldots,n,$$

dla $x\le x_1<x_2<\ldots<x_n$ otrzymujemy $|x-x_i|=-(x-x_i)$ dla wszystkich $i=1,\ldots,n$, wtedy

$$f(x)=-(a_1+\ldots+a_n)x+(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)=b_1x+c_1$$

i otrzymujemy funkcję liniową ze współczynnikiem kierunkowym $b_1=-(a_1+\ldots+a_n)<0$.
W następnym przedziale dla $x_1<x\le x_2<\ldots<x_n$ mamy $|x-x_1|=(x-x_i)$ i $|x-x_i|=-(x-x_i)$ dla $i=2,\ldots,n$, a stąd

$$f(x)=b_2x+c_2 \text{ z } b_2=a_1-(a_2+\ldots+a_n), \text{ gdzie } b_1<b_2.$$

Przesuwając się z x do kolejnych przedziałów, coraz więcej współczynników a_i jest dodawanych i jednocześnie coraz mniej odejmowanych. Na koniec $x_1<x\le x_2<\ldots<x_n<x$ i otrzymujemy $b_{n+1}=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$, gdzie $b_1<b_2<\ldots<b_{n+1}$ oraz co łatwo zauważyć $b_{n+1}=-b_1$.

Współczynniki b_k funkcji liniowych informują nas o monotoniczności funkcji. Funkcja więc tak długo maleje ($b_k\le 0$) lub jest stała, aż $b_k>0$ i funkcja zaczyna rosnąć. Wynika stąd, że minimum osiąga na końcu ostatniego przedziału, w którym malała lub w przedziale w którym $b_k=0$, co widać na rysunkach 1 i 2.

Wyznaczenie argumentów, dla których funkcja osiąga minimum polega więc na wyznaczeniu dla jakiego $k=1,2,\ldots,n,n+1$ następuje zmiana $b_k\le 0$ na $b_{k+1}>0$.

Przy oznaczeniach $A=a_1+..+a_n$ i $A_k=a_1+..+a_k$ dla $k=1,2,\ldots,n$, $A_0=0$, $A'_k=A-A_k$

otrzymujemy $A_0<\frac{1}{2}A$ i układ nierówności

$$\begin{cases}b_k=A_{k-1}-A'_{k-1}\le 0\\ b_{k+1}=A_k-A'_k>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A_{k-1}\le A'_{k-1}\\ A_k>A'_k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A_{k-1}\le A-A_{k-1}\\ A_k>A-A_k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A_{k-1}\le\frac{1}{2}A\\ A_k>\frac{1}{2}A\end{cases}.$$

co prowadzi do prostej reguły znajdowania minimum funkcji:

Twierdzenie.

Funkcja $f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i|x-x_i|$ o dodatnich współczynnikach $a_i>0$ osiąga minimum dla $x=x_k$ takiego, że $\begin{cases} A_{k-1}<\frac{1}{2}A \\ A_k>\frac{1}{2}A \end{cases}$ lub na przedziale $\langle x_k, x_{k+1}\rangle$, gdy $A_k=\frac{1}{2}A$, dla $k=1,2,...,n$.

Podsumowując:

1. Po uporządkowaniu $x_1<x_2<....<x_n$, dodajemy kolejne współczynniki a_i do momentu, aż suma $A_k=a_1+..+a_k$ będzie równa połowie sumy wszystkich współczynników lub ją przekroczy.
2. a) Jeśli $A_k=\frac{1}{2}A$, to wtedy $b_{k+1}=0$ i funkcja f jest w przedziale $\langle x_k, x_{k+1}\rangle$ stała, więc w każdym punkcie tego przedziału przyjmuje wartość najmniejszą ,

   b) jeśli $\begin{cases} A_{k-1}<\frac{1}{2}A \\ A_k>\frac{1}{2}A \end{cases}$, to funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla $x=x_k$.

Przykład.

Wyznacz punkty, w których funkcja

$$f(x)=2|x-3|+|x-1|+3|x+1|+|x-2|+2|x+2|$$

przyjmuje wartość najmniejszą.

Rozwiązanie.

Ustawiamy wartości bezwzględne tak, aby $x_1<x_2<....<x_n$. Wtedy

$$f(x)=2|x-(-2)|+3|x-(-1)|+|x-1|+|x-2|+2|x-3|$$

Suma wszystkich współczynników $A=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2+3+1+1+2=9$,

$A_1=a_1=2<\frac{1}{2}A=4{,}5$ oraz $A_2=a_1+a_2=5>\frac{1}{2}A=4{,}5$, więc funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość dla argumentu $x=x_2=-1$.

Ta prosta własność funkcji $f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i|x-x_i|$ o dodatnich współczynnikach $a_i>0$ ma bardzo poważne konsekwencje w statystyce matematycznej, co będzie opisane w trzeciej części artykułu.

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

Dla jakich argumentów funkcja osiąga minimum i ile jest ono jest równe, jeśli

1. $f(x)=4|x-4|+3|x+3|+2|x-2|+|x+1|$,   2. $f(x)=\sum_{i=1}^{n}|x-i|$?