Współczynniki wielomianu

Andrzej Matraś, Wydział Matematyki i Informatyki UWM

Zadanie. Znaleźć sumę współczynników wielomianu

$$f(x) = (x^{50} + x^{25} - 2)^{100} + (x^{50} - x^{25} + x^5 - 1)^{100}.$$

Rozwiązanie. Znamy wzór Newtona

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

(Wyjaśniam, że symbol $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ oznacza $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$.)
Mimo to sprawa wydaje się beznadziejna. Ale popatrzmy ... Wartość w punkcie 1 funkcji wielomianowej wielomianu

$$h = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

jest równa

$$h(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

Stąd szukana suma współczynników wielomianu f jest równa $f(1) = 0$. Stosując fakt, że suma współczynników dowolnego wielomianu jest równa wartości jego funkcji wielomianowej w punkcie 1, do wielomianu $f = (x-1)^n$ otrzymamy równość

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0,$$

a do wielomianu $f = (x-2)^n$ - równość

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^k \binom{n}{k} = (-1)^n.$$

W ten sposób wzór Newtona pozwala otrzymywać różne, bardziej skomplikowane tożsamości związane ze współczynnikami $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

A co do wzoru Newtona - uogólnia się on na dowolne przemienne pierścienie z 1, o czym można przekonać się już na pierwszym (może trochę przesadzam...) roku matematyki.

Zadanie. Udowodnić tożsamości:

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
2. $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$.