Minimum i maksimum funkcji kwadratowej

Janusz Karkut, Akademicki Zespół Placówek Oświatowych w Fijewie

Rozważmy następujące zadanie:

1. Niech $f(x) = x^2 + 6x + 5$.
a) Naszkicuj wykres funkcji *f*.
b) Wyznacz najmniejszą wartość $f(x), x \in R$.
c) Jaki związek ma wartość *x*, dla której wartość $f(x)$ jest najmniejsza, z miejscami zerowymi funkcji *f*?

Ad. a) Korzystając ze wzoru uproszczonego mnożenia, przedstawmy $x^2 + 6x + 5$ w postaci kanonicznej $a(x-p)^2 + q$:

$$x^2 + 6x + 5 = (x+3)^2 - 9 + 5 = (x+3)^2 - 4.$$

Wykresem tej funkcji jest parabola o wierzchołku $(-3, -4)$. Jej miejscami zerowymi są liczby

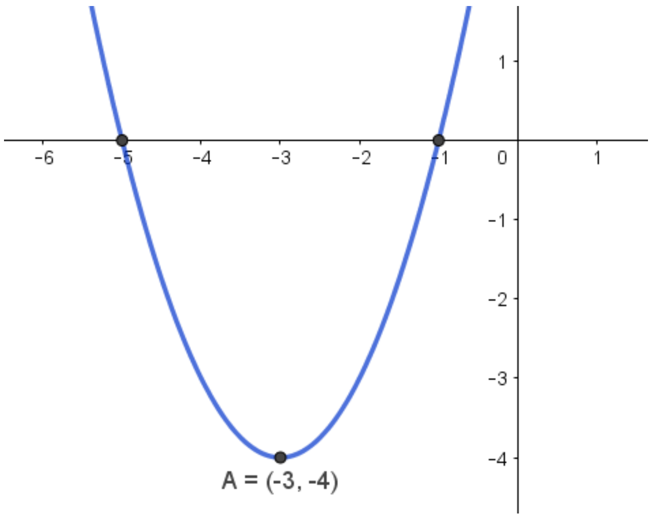
$$x_1 = p - \sqrt{-\frac{q}{a}} \text{ i } x_2 = p + \sqrt{-\frac{q}{a}},$$

czyli

$$x_1 = -3 - \sqrt{-\frac{-4}{1}} = -3 - 2 = -5 \text{ i } x_2 = -3 + \sqrt{-\frac{-4}{1}} = -3 + 2 = -1.$$

Wiemy też, że parabola ma kształt paraboli o równaniu $y = x^2$, a jej osią symetrii jest prosta o równaniu $x = -3$.

Oto jej wykres:



Ad. b) Powyższy wykres daje odpowiedź: najmniejszą wartością funkcji f jest – 4. Funkcja przyjmuje ją dla $x = -3$.

Można to też uzasadnić algebraicznie. Z postaci $(x+3)^2 - 4$ wynika, że:

- $(x+3)^2 \geq 0$ dla każdego $x \in R$,

- $(x+3)^2 - 4 \geq -4$.

Oznacza to, że $f(x) \geq -4$, a ponieważ $f(-3) = -4$, więc -4 jest wartością najmniejszą.

Ad. c) Ponieważ miejscami zerowymi funkcji *f* są liczby – 5 i – 1, to postacią iloczynową funkcji *f* jest postać

$$f(x) = (x+1)(x+5).$$

Warto zauważyć, że równanie osi symetrii paraboli, w naszym przypadku $x = \frac{-5+(-1)}{2} = -3$, można wyznaczyć jako średnią arytmetyczną miejsc zerowych x_1 i x_2:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Przejdźmy do uogólnienia.

2. Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie a ,b, c są liczbami rzeczywistymi i $a > 0$. Wyznacz przy pomocy a, b i/lub c rzeczywistą wartość x, dla której wartość funkcji jest najmniejsza. Jak zmieni się sytuacja, gdy a będzie ujemne?

Postępując podobnie jak w poprzednim przykładzie, otrzymujemy:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Wykresem jest parabola z ramionami skierowanymi w górę, o wierzchołku w punkcie $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$. Najniżej położonym punktem paraboli jest punkt o rzędnej $c - \frac{b^2}{4a}$, którego odciętą jest $x = -\frac{b}{2a}$; inaczej: $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - \frac{b^2}{4a}$.

Jeśli a jest liczbą ujemną, to parabola ma ramiona zwrócone w dół, a punkt $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ jest najwyżej położonym punktem paraboli; wówczas $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - \frac{b^2}{4a}$ jest maksimum funkcji *f*.

Jeśli zatem

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ gdzie } a, b, c \text{ są stałymi,}$$

to:

- jeżeli $a > 0$, wówczas **minimum** $f(x)$ wynosi $c - \frac{b^2}{4a}$ dla $x = -\frac{b}{2a}$;
- jeżeli $a < 0$, wówczas **maksimum** $f(x)$ wynosi $c - \frac{b^2}{4a}$ dla $x = -\frac{b}{2a}$.

Zauważmy, że wzorów tych nie musimy pamiętać. Wystarczy dobrze operować postacią kanoniczną!