O wykresie trójmianu kwadratowego

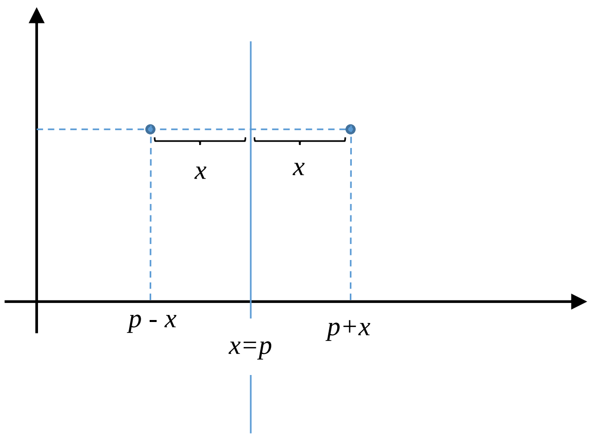
Zbigniew Paprzycki, Wydział Matematyki i Informatyki UWM w Olsztynie

Jeśli zrobimy punktowy wykres dla kilku wartości trójmianu kwadratowego $y = ax^2 + bx + c$ dla dowolnie ustalonych współczynników a b c, to widzimy, że układają się one symetrycznie względem pewnej osi.

Stąd możemy wyciągnąć wniosek o istnieniu symetrii osiowej wykresu trójmianu. Ale to tylko wizualna sugestia, którą trzeba sprawdzić.

Wykres funkcji $y = f(x)$ ma oś symetrii $x = p$ wtedy, gdy istnieje liczba p taka, że dla każdego $x \in D_f$ zachodzi

$$f(p+x) = f(p-x).$$



Bez trudu sprawdzamy, że wykres trójmianu kwadratowego dla $a \neq 0$ posiada oś symetrii $x = p$, gdzie p wyznaczamy z równości $f(p+x) = f(p-x)$.

Mianowicie przyjmując $f(x) = ax^2 + bx + c$ otrzymujemy równanie

$$a(p-x)^2 + b(p-x) + c = a(p+x)^2 + b(p+x) + c,$$

które zgodnie z definicją musi być przy pewnym p spełnione dla wszystkich $x \in R$.

Po wykonaniu elementarnych działań otrzymujemy

$$a(p^2 - 2px + x^2) + b(p-x) + c = a(p^2 + 2px + x^2) + b(p+x) + c$$

co po redukcji takich samych wyrazów daje wynik

$$-2apx - bx = 2apx + bx,$$

czyli $2apx + bx = 0$.

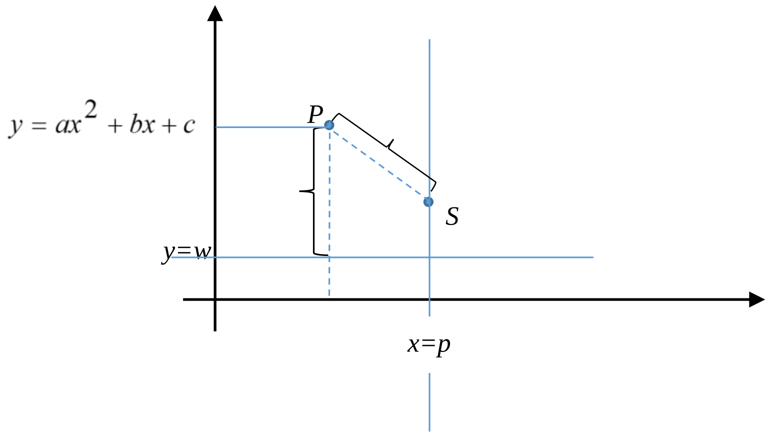
Ostatnie równanie jest spełnione dla wszystkich $x \in R$, jeśli przyjmiemy $p = -\frac{b}{2a}$.

Definicja paraboli.

Parabola, to linia której punkty są równoodległe do wybranego punktu S nazywanego ogniskiem paraboli i pewnej prostej nazywanej kierownicą paraboli.

W przypadku trójmianu kwadratowego o którym już stwierdziliśmy, że ma wykres symetryczny względem prostej $x = p$, gdzie $p = -\frac{b}{2a}$ możemy spodziewać się, że punkt S leży na osi symetrii, a kierownica, to prosta prostopadła do linii $x = p$, czyli ma równanie $y = w$.

Sprawdzimy, czy nasze przypuszczenia są zasadne.



Odległość punktu $P(x, y)$, gdzie $y = ax^2 + bx + c$ od prostej $y = w$ jest równa

$$ax^2 + bx + c - w,$$

natomiast odległość punktu P od punktu S równa jest

$$\sqrt{(x-p)^2 + (ax^2 + bx + c - z)^2}\ .$$

Stąd otrzymujemy równanie

$$ax^2 + bx + c - w = \sqrt{(x-p)^2 + (ax^2 + bx + c - z)^2}$$

Po podniesieniu do kwadratu obu stron równania otrzymujemy

$$(ax^2 + bx + c - w)^2 = (x-p)^2 + (ax^2 + bx + c - z)^2$$

Wyrażenie $(ax^2 + bx + c - z)^2$ przeniesiemy na lewą stronę i wykorzystamy wzór na różnicę kwadratów.

$$(ax^2 + bx + c - w)^2 - (ax^2 + bx + c - z)^2 = (x-p)^2$$

$$\big((ax^2 + bx + c - w) + (ax^2 + bx + c - z)\big)\big((ax^2 + bx + c - w) - (ax^2 + bx + c - z)\big) = (x-p)^2$$

$$(2ax^2 + 2bx + 2c - w - z)(z - w) = x^2 - 2px + p^2$$

Po przeniesieniu na lewą stronę i pogrupowaniu otrzymujemy, że dla każdego $x \in R$ zachodzi

$$x^2(2a(z-w)-1)+x(2b(z-w)+2p)+(2c-w-z)(z-w)-p^2=0$$

Stąd

$$\begin{cases} 2a(z-w)-1=0 \\ 2b(z-w)+2p=0 \\ (2c-w-z)(z-w)-p^2=0 \end{cases}$$

Podstawiając $p=-\dfrac{b}{2a}$ można zauważyć, że drugie równanie jest identyczne z pierwszym lub tożsamościowo spełnione dla $b=0$ i możemy je wyeliminować. Wtedy

$$\begin{cases} z-w=\dfrac{1}{2a} \\ (2c-w-z)\cdot\dfrac{1}{2a}-\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2=0 \end{cases} \text{, a stąd } \begin{cases} z-w=\dfrac{1}{2a} \\ (2c-w-z)=2a\cdot\dfrac{b^2}{4a^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z-w=\dfrac{1}{2a} \\ w+z=2c-\dfrac{b^2}{2a}=\dfrac{-(b^2-4ac)}{2a}=\dfrac{-\Delta}{2a} \end{cases}$$

Po dodaniu stronami

$$2z=\frac{-\Delta}{2a}+\frac{1}{2a}, \text{ czyli } z=\frac{-\Delta+1}{4a}.$$

Natomiast odejmując stronami otrzymujemy w, co razem daje

$$w=\frac{-\Delta-1}{4a} \quad \text{i} \quad z=\frac{-\Delta+1}{4a}.$$

Wniosek.

Wykres trójmianu kwadratowego $y=ax^2+bx+c$ jest parabolą o ognisku w punkcie $S\left(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{1-\Delta}{4a}\right)$ i kierownicy o równaniu $y=\dfrac{-\Delta-1}{4a}$.

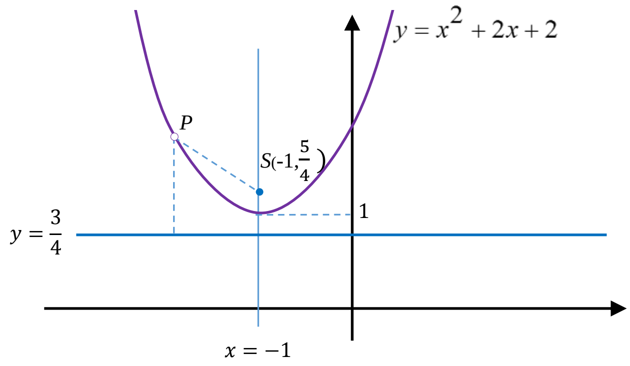
Przykład.

Sporządzimy wykres funkcji $y=x^2+2x+2$. Zgodnie z wnioskiem

$$S\left(\frac{-b}{2a},\frac{1-\Delta}{4a}\right)=S\left(\frac{-2}{2},\frac{1-(-4)}{4a}\right)=S\left(-1,\frac{5}{4}\right),$$

a kierownica ma równanie

$$y=\frac{-\Delta-1}{4a}=\frac{3}{4}$$



Na koniec zwrócimy uwagę na ważne w matematyce pojęcie *mimośrodu* dla krzywych które posiadają stały iloraz odległości od pewnego punktu (ogniska) i pewnej prostej (kierownicy):

$$e = \frac{odległość\ punktu\ od\ ogniska}{odległość\ punktu\ od\ kierownicy}$$

Iloraz ten nazywamy mimośrodem.

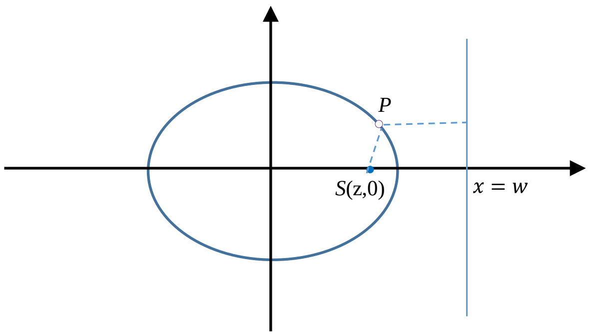
Na przykład parabola (co już wiemy) ma mimośród równy 1. Inne krzywe o stałym mimośrodzie:

okrąg - mimośród jest zerowy;

elipsa niebędąca okręgiem – mimośród jest większy od zera, ale mniejszy od 1;

hiperbola – mimośród jest większy niż 1.

Zadanie 1.
Czy potrafisz wyznaczyć ognisko i kierownicę elipsy o równaniu $x^2 + 2y^2 = 2$ przyjmując, że ognisko znajduje się na osi OX, kierownica ma równanie $x = w$, a mimośród $e = \sqrt{2}/2$.



Zadanie 2.
Wyznacz równanie linii której punkty są równoodległe od punktu $A(1,3)$ i $B(3,0)$. Jaka to linia?

Zadanie 3.
Wyznacz równanie linii której punkty są równoodległe od punku $S(1,1)$ i prostej $y = -1$.