O minimach dwóch ważnych funkcji. Część druga.

Elżbieta Guziejko, I Liceum Ogólnokształcące w Olecku

Zbigniew Paprzycki, Wydział Matematyki i Informatyki UWM

Rozważmy funkcję postaci $f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x-x_i)^2$ o dodatnich współczynnikach $a_i>0$ i dowolnie ustalonych wartościach rzeczywistych $x_i \in R$ dla $i=1,...,n$, gdzie symbol $\sum_{i=1}^{n} a_i(x-x_i)^2$ oznacza sumowanie $a_1(x-x_1)^2+a_2(x-x_2)^2+...+a_n(x-x_n)^2$.

Jest to, po zsumowaniu, trójmian kwadratowy

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x-x_i)^2 = a_1(x-x_1)^2+a_2(x-x_2)^2+...+a_n(x-x_n)^2 =$$

$$=(a_1+a_2+...+a_n)x^2-2(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n)x+\left(a_1x_1^2+a_2x_2^2+...+a_nx_n^2\right)=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)x^2-\left(2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i\right)x+\sum_{i=1}^{n} a_ix_i^2$$

Ponieważ współczynniki $a_i>0$, więc funkcja kwadratowa osiąga najmniejszą wartość dla argumentu $x_w=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$ i jest średnią ważoną (a_i są wagami punktów x_i), którą oznaczymy $\overline{\overline{x}}$.

Możemy również dokonać analizy w inny sposób, stosowany często w statystyce.

Mianowicie, do zapisu funkcji wprowadzić średnią ważoną $\overline{\overline{x}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$ i po przekształceniach otrzymać następujący zapis:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x-x_i)^2=\sum_{i=1}^{n} a_i((x-\overline{\overline{x}})-(x_i-\overline{\overline{x}}))^2=\sum_{i=1}^{n} a_i\left[(x-\overline{\overline{x}})^2-2(x-\overline{\overline{x}})(x_i-\overline{\overline{x}})+(x_i-\overline{\overline{x}})^2\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} a_i(x-\overline{\overline{x}})^2-2(x-\overline{\overline{x}})\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i-\overline{\overline{x}})+\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i-\overline{\overline{x}})^2.$$

Ponieważ $\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i-\overline{\overline{x}})=\sum_{i=1}^{n} a_ix_i-\sum_{i=1}^{n} a_i\overline{\overline{x}}=0$ (sprawdzenie tego faktu pozostawiamy czytelnikowi), więc wobec tego analizowana suma kwadratów ma postać

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x-x_i)^2=\sum_{i=1}^{n} a_i(x-\overline{\overline{x}})^2+\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i-\overline{\overline{x}})^2$$

i zależy tylko od x. Suma kwadratów jest najmniejsza, gdy poszczególne składniki są równe zero i w naszym przypadku jest najmniejsza, gdy pierwszy składnik jest równy zero, a to zachodzi wówczas, gdy $x = \overline{\overline{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$. Na drugi składnik nie mamy wpływu, ponieważ występujące w nim elementy są ustalonymi stałymi.

Przykład.

Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = \sum_{i=1}^{n} i(x-i)^2$ osiąga najmniejszą wartość?

Rozwiązanie.

Funkcja osiąga najmniejszą wartość, jeśli argument jest równy średniej ważonej

$$\overline{\overline{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} i^2}{\sum_{i=1}^{n} i} = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\frac{1}{2}(n+1)n} = \frac{1}{3}(2n+1).$$

Pozostawiamy czytelnikowi sprawdzenie, że $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ w oparciu o zasadę indukcji matematycznej lub korzystając z zależności $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.

Ciekawym przykładem jest funkcja, w której wszystkie współczynniki są jedynkami:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2 ,$$

wówczas najmniejszą wartość osiąga dla argumentu równego średniej arytmetycznej

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} .$$

Ta prosta własność funkcji $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i (x - x_i)^2$ o dodatnich współczynnikach $a_i > 0$ ma bardzo poważne konsekwencje w statystyce matematycznej, co będzie opisane w trzeciej części artykułu.

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

1. Wyznacz, dla jakich argumentów funkcja $f(x) = 16(x+4)^2 + 9(x+3)^2 + 4(x+2)^2 + (x+1)^2 + (x-1)^2 + 4(x-2)^2 + 9(x-3)^2$ osiąga najmniejszą wartość.

2. Wyznacz, dla jakich argumentów funkcja $f(x) = \sum_{i=1}^{n} i^2 (x-i)^2$ osiąga najmniejszą wartość.

3. Korzystając z zależności $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ wyprowadź wzór na sumę kwadratów kolejnych liczb naturalnych $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.