Miejsca zerowe funkcji kwadratowej

Jakub Stromski, Michał Flakowski, Aleksander Strzelecki, klasa II,
II Liceum Ogólnokształcące z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Kazimierza Jagiellończyka w Elblągu
pod kierunkiem Ewy Aniszewskiej

1) Wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- a, b, c – współczynniki liczbowe
- $a \neq 0$
- $b \in R \ i \ c \in R$

2) Wyróżnik funkcji kwadratowej (delta) Δ

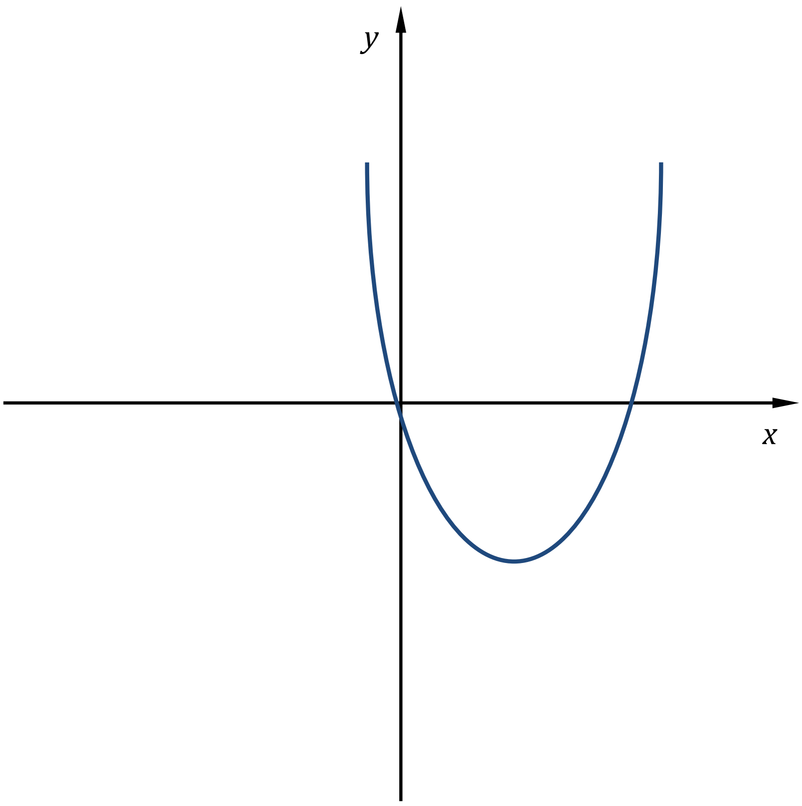
$$\Delta = \ b^2 - 4ac$$

3) Wyprowadzenie wzorów miejsc zerowych funkcji kwadratowej

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Rozważmy przypadek funkcji:

$$f(x) = ax^2 + bx$$



Będzie ona przechodzić przez punkt o współrzędnych (0;0). Można policzyć także współrzędne drugiego miejsca zerowego:

$$0 = ax^2 + \mathrm{bx}$$

$$x = 0 \wedge x = \frac{-b}{a}$$

Niech W = (p;q) będzie wierzchołkiem paraboli. p jest średnią arytmetyczną miejsc zerowych, o ile te miejsca istnieją:

$$p = \frac{-b}{2a}$$

$$q = f(p)$$

$$q = ap^2 + bp + c$$

$$q = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$q = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

$$q = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$$q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Zatem:

$$\begin{cases} p = \dfrac{-b}{2a} \\ q = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \end{cases}$$

gdzie q jest odległością wierzchołka od osi OX. Rozważmy zatem kolejną parabolę:

$$y = ax^2$$

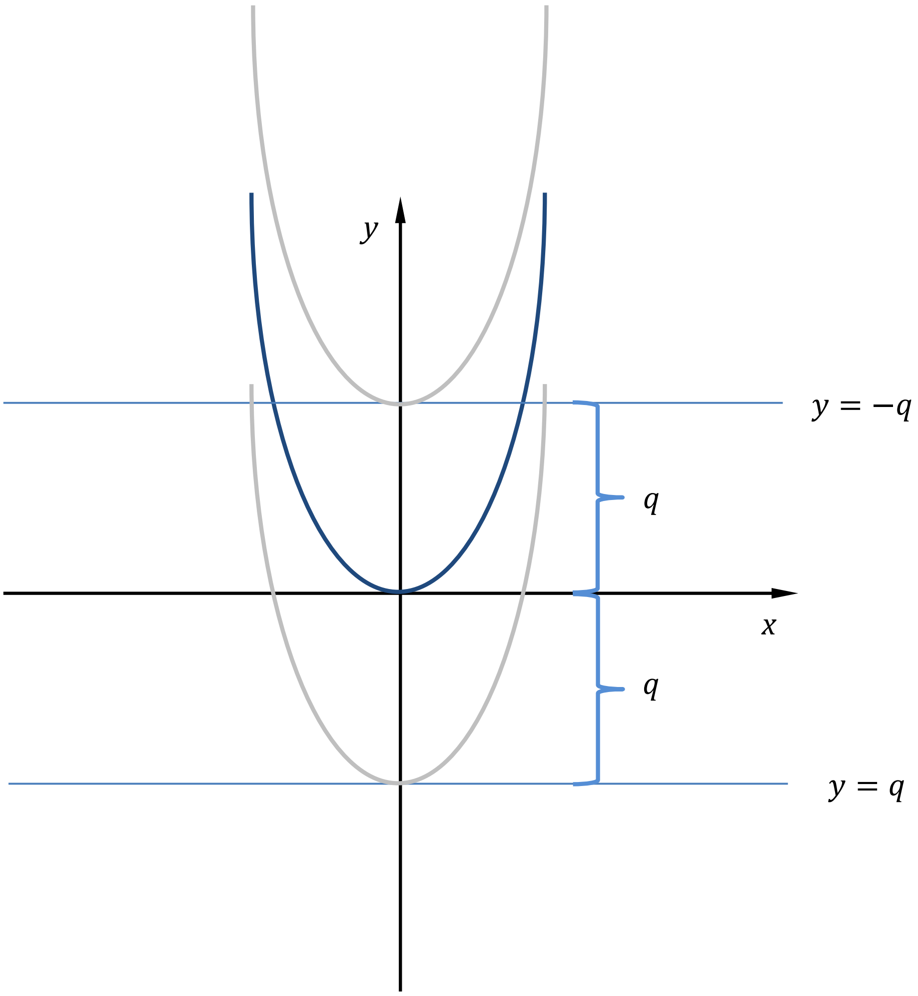
q jest współrzędną y, zatem:

$$-q = ax^2$$

gdyż q znajduje się po drugiej stronie osi OX.

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a} = ax^2 \mid : a, bo\ a \neq 0$$

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = x^2$$



Zatem:

$$x = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jest to odległość od wierzchołka paraboli do argumentu, którego wartość wynosi −q.

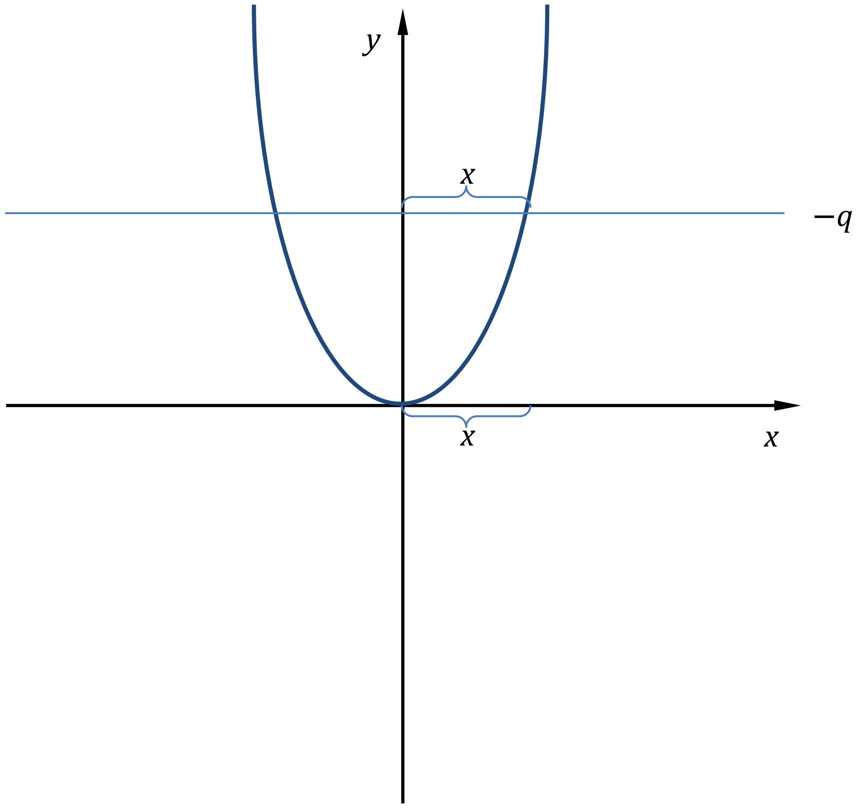
Wierzchołek na osi OX ma wartość p zatem:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$b^2 - 4ac$ możemy oznaczyć jako Δ, więc:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$q = -\frac{\Delta}{4a}$$



W równaniu pojawia się $\sqrt{\Delta}$ zatem:

1° $\Delta > 0 \rightarrow \sqrt{\Delta} > 0$, a miejsca zerowe są 2.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2° $\Delta = 0 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 0$, a miejsce zerowe jest jedno.

$$x = \frac{-b}{2a}$$

3° $\Delta < 0 \rightarrow \sqrt{\Delta}$ nie istnieje, więc taka parabola nie ma miejsc zerowych.

4) Przykładowe zastosowanie w zadaniach

Przykład 1 Podaj ilość miejsc zerowych funkcji kwadratowej oraz wyznacz ich wartości:

a) $f(x) = 6x^2 + 4x + 3$
b) $f(x) = 5x^2 + 10x + 5$
c) $f(x) = 3x^2 + 11x + 9$

Rozwiązanie:

a) Wyznaczam Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3$

$\Delta = -56$

$\Delta < 0$

Brak miejsc zerowych $m_z = \{\emptyset\}$

b) Wyznaczam Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5$

$\Delta = 0$

Jedno miejsce zerowe:

$x_0 = \frac{-b}{2a}$

$x_0 = \frac{-10}{10}$

$x_0 = -1$

$m_z = \{-1\}$

c) Wyznaczam Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta = 11^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9$

$\Delta = 13$

Dwa miejsca zerowe:

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-11 - \sqrt{13}}{2 \cdot 3}$

$x_1 = \frac{-11 - \sqrt{13}}{6}$

$x_2 = \frac{-11 + \sqrt{13}}{2 \cdot 3}$

$x_2 = \frac{-11 + \sqrt{13}}{6}$