O pierwiastkach równania kwadratowego w zadaniach z parametrem

Krzysztof Żyjewski, Damian Wiśniewski, Wydział Matematyki i Informatyki UWM

Rozważymy problem znalezienia wartości parametru m, dla której pierwiastki równania kwadratowego

$$x^2 + 2mx + 4m = 0 \tag{1}$$

są mniejsze od -1.

Zadanie to możemy rozwiązać z użyciem wzorów Viete'a. Przede wszystkim zauważmy, że równanie (1) ma rozwiązania, jeśli

$$\Delta = 4m^2 - 16m = 4m(m-4) \geq 0,$$

czyli dla $m \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty)$. Chcemy dowiedzieć się dla jakiej wartości parametru m pierwiastki x_1, x_2 naszego równania są jednocześnie mniejsze od -1, czyli $\begin{cases} x_1 < -1, \\ x_2 < -1. \end{cases}$

Stąd, oczywiście $\begin{cases} x_1 + 1 < 0, \\ x_2 + 1 < 0, \end{cases}$ co jest równoważne kolejnym układom

$$\begin{cases} (x_1 + 1) + (x_2 + 1) < 0 \\ (x_1 + 1) \cdot (x_2 + 1) > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2 < 0 \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 + 1 > 0. \end{cases}$$

Ale, zgodnie ze wzorami Viete'a, mamy $x_1 + x_2 = -2m,\ x_1 \cdot x_2 = 4m$. Stąd ostatecznie

$$\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ x_1 < -1, \\ x_2 < -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty), \\ m > 1, \\ m > -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad \Leftrightarrow m \in [4, +\infty)\,.$$

Przedstawiony problem można również rozwiązać korzystając z twierdzenia, którego treść zaprezentujemy poniżej.

W tym celu rozpatrzmy trójmian kwadratowy $f(x)$ postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$ oraz załóżmy, że x_1, x_2 są jego miejscami zerowymi takimi, że

$$x_1 < M \quad \text{oraz} \quad x_2 < M, \tag{2}$$

gdzie $M \in \mathbb{R}$.

Po pierwsze zauważmy, że równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ posiada pierwiastki wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac$ jest nieujemny ($\Delta \geq 0$). Teraz, na podstawie (2) otrzymujemy, że

$$x_1 - M < 0 \qquad \text{oraz} \qquad x_2 - M < 0.$$

Zatem mają miejsce następujące nierówności:

$$\begin{cases} (x_1 - M) + (x_2 - M) < 0, \\ (x_1 - M)(x_2 - M) > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Korzystając ze wzorów Viete'a $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ układ (3) zapisujemy w postaci:

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} < 2M, \\ M^2 + \frac{b}{a}M + \frac{c}{a} > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Mnożąc drugie równanie układu (4) przez a^2, dostajemy

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} < M, \\ a(aM^2 + bM + c) > 0. \end{cases}$$

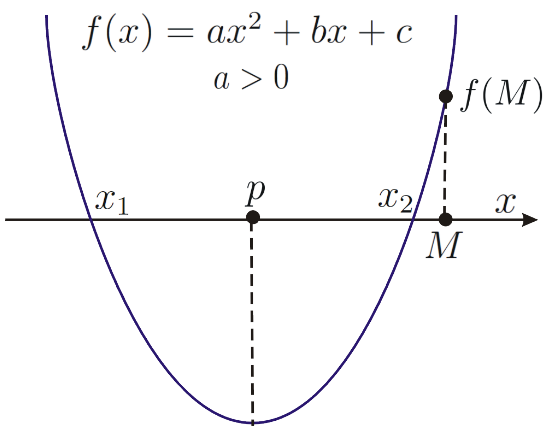
Co oznacza, że wykazane zostało twierdzenie następującej treści:

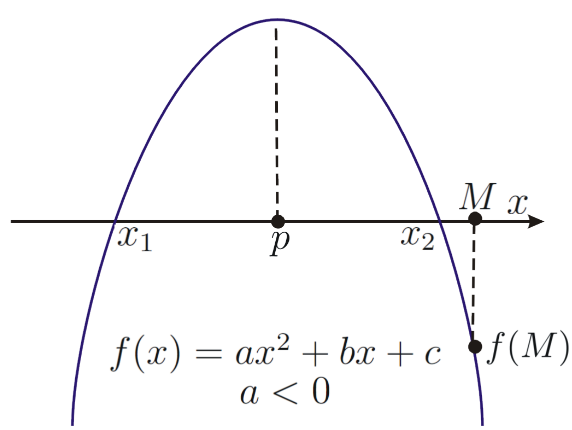
Twierdzenie 1. *Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$. Rozwiązania równania $f(x) = 0$ są jednocześnie są mniejsze od M $(x_1 < M, x_2 < M)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:*

$$\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ p < M, \\ a \cdot f(M) > 0, \end{cases} \tag{5}$$

gdzie $p = -\frac{b}{2a}$.

Układ (5) otrzymalibyśmy rownież analizując wykres funkcji kwadratowej $f(x)$:





W tym miejscu zachęcamy Czytelnika do rozwiązania postawionego problemu jeszcze raz, tym razem z zastosowaniem twierdzenia 1.

Zauważmy również, że jeżeli w twierdzeniu 1 wybierzemy $M = 0$, wówczas układ (5) będzie równoważny układom

$$\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} < 0, \\ ac > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Delta \geq 0, \\ -\frac{b}{a} < 0, \\ \frac{c}{a} > 0. \end{cases}$$

Zatem, aby oba pierwiastki równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ były ujemne otrzymujemy ze szkoły dobrze znane warunki

$$\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ x_1 + x_2 < 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0. \end{cases}$$

Problemy do samodzielnych przemyśleń:

1. Jakie warunki muszą być spełnione, aby oba miejsca zerowe trójmianu kwadratowego $f(x) = ax^2 + bx + c$ były większe od pewnej liczby rzeczywistej M?

2. Jakie warunki muszą być spełnione, aby oba miejsca zerowe trójmianu kwadratowego $f(x) = ax^2 + bx + c$ należały do przedziału (K, M), gdzie K, M to dowolne liczby rzeczywiste?

3. Jakie warunki muszą być spełnione, aby odcinek $[K, M] \subset (x_1, x_2)$, gdzie x_1, x_2 to miejsca zerowe trójmianu kwadratowego $f(x) = ax^2 + bx + c$, a K, M to dowolne liczby rzeczywiste?