Równania diofantyczne - część 2

Piotr Jastrzębski, Wydział Matematyki i Informatyki UWM

W części drugiej omówimy równania diofantyczne stopnia drugiego. Ich postać jest następująca:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

gdzie a, b i c są liczbami całkowitymi.

Jeśli dodatkowo założymy, że wszystkie liczby są dodatnie, to mówimy o równaniu Pitagorasa. W tej sytuacji jeśli boki trójkąta spełniają powyższą zależność, to taki trójkąt jest prostokątny. Takie trójki (a, b, c) nazywamy pitagorejskimi. Kilka z nich podano w tabeli po prawej.

a	b	c
3	4	5
5	12	13
6	8	10
7	24	25
8	15	17

Zauważmy, że jeżeli trójka (a, b, c) jest pitagorejska, to trójka (ka, kb, kc) też jest pitagorejska dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej k. Trójkę pitagorejską nazywamy właściwą, jeśli a, b i c nie mają wspólnego dzielnika większego od 1.

Twierdzenie 1. *Dla każdej właściwej trójki pitagorejskiej (a, b, c) istnieją względnie pierwsze liczby naturalne m i n różnej parzystości, spełniające warunek $m > n$ oraz takie, że:*

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2 \cdot m \cdot n, \quad c = m^2 + n^2.$$

Tabliczka pierwszych rozwiązań:

m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25

Warte zauważenia jest to, że pierwsza trójka $(3, 4, 5)$ jest jedyną złożoną z trzech kolejnych liczb naturalnych. Sprawdźmy to. Rozważmy trzy kolejne liczb naturalne:

$$(n-1), \quad n, \quad (n+1).$$

Podstawiając do równania

$$(n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2$$

otrzymujemy

$$n \cdot (n-4) = 0.$$

Ponieważ $n - 1$ powinno być liczbą całkowitą dodatnią, zatem $n = 4$.

Literatura

[1] Sierpiński Wacław, *Teoria liczb*, Monografie Matematyczne, Tom 19, Warszawa - Wrocław 1950, wyd. III, dostęp online 21.02.2017, http://pldml.icm.edu.pl/pldml/element/bwmeta1.element.dl-catalog-a064b502-798f-4529-935f-9b132b5667dd.