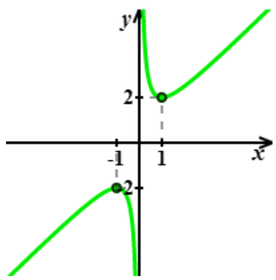
O pewnej nierówności i komplikowaniu życia uczniom

Zbigniew Paprzycki

Rozważmy funkcję

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

dla $x \neq 0$, o wykresie



Rysunek 1: Wykres funkcji, gdzie f(1)=2 oraz f(-1)=-2

Możemy od razu zauważyć, że jest to funkcja nieparzysta

$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -(x + \frac{1}{x}) = -f(x)$$

oraz, że

$$f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} + x = f(x).$$

Z wykresu widać, że dla $x > 0$ zachodzi $f(x) \geqslant 2$ natomiast dla $x < 0$ mamy $f(x) \leqslant -2$ co możemy zapisać nierównościami

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \quad \text{dla} \quad x > 0 \qquad \text{oraz} \qquad x + \frac{1}{x} \leqslant -2 \quad \text{dla} \quad x < 0.$$

Nierówności tych możemy również dowieść przez proste przekształcenia. Dla pierwszej nierówności

$$x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x} = \frac{x^2+1}{x} - 2 + 2 = \frac{x^2-2x+1}{x} + 2 \geqslant 2$$

ponieważ $\quad \dfrac{x^2-2x+1}{x} = \dfrac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0.$

Analogicznie drugą nierówność otrzymujemy przez przekształcenia

$$x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+2x+1}{x} - 2 = \frac{(x+1)^2}{x} - 2 \leqslant -2 \quad dla \quad x < 0.$$

W zadaniach często spotykamy powyższą nierówność dla $x = \frac{a}{b}$, która przyjmuje postać

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2 \quad dla \quad a, b > 0.$$

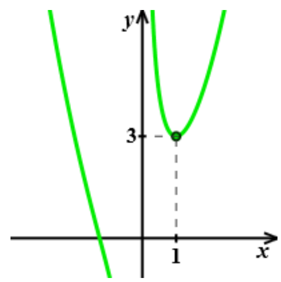
Teraz możemy komplikować zadania wykorzystujące ostatnią nierówność. Przykładowo:

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}=\frac{1}{2}(\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a})=$$
$$=\frac{1}{2}(a(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})+b(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})+c(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})\geqslant\frac{1}{2}(2a+2b+2c)=a+b+c$$

Otrzymaliśmy nierówność

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant a+b+c.$$

dla $a, b, c > 0$, która może być treścią zadania.
Gdybyśmy chcieli jeszcze bardziej utrudnić życie uczniom, to możemy zauważyć, że nasza rozważana nierówność opiera się na dość prostej funkcji, która posiada dla $x > 0$ wartość najmniejszą $f(1) = 2$. Funkcji takich z wartością najmniejszą np. dla $x > 0$ jest "dużo", więc możemy zadania utrudniać dalej.
Na przykład weźmy bardzo podobną funkcję $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ o wykresie



Rysunek 2: Wykres funkcji, gdzie f(1)=3

Z wykresu widać, że dla $x > 0$ prawdziwa jest nierówność $x^2+\frac{2}{x}\geqslant 3$. Stąd po podstawieniu $x=\frac{a}{b}$ i prostych przekształceniach otrzymamy nierówność

$$a^3+2b^3\geqslant 3ab^2 \quad dla \quad a,b>0.$$

Jeśli czytelniku potrafisz znaleźć funkcję i w oparciu o jej minimum wskazać ciekawą nierówność o zgrabnym "regularnym zapisie", to ją opisz, a my ją opublikujemy.

Zadania do samodzielnego przeanalizowania.

Wykaż, że

a) $x+\frac{4}{x}\geqslant 4$ dla $x>0$, b) $x+\frac{a}{x}\geqslant 2\sqrt{a}$ dla $a,x>0$,

c) $a^2+b^2\geqslant 2\sqrt{a(a^2+b^2)}-a$ dla $a>0$.