

Równania diofantyczne - część 1

Piotr Jastrzębski

Równanie diofantyczne to takie równanie, którego rozwiązanie szukamy w liczbach całkowitych lub naturalnych. Ich nazwa pochodzi od greckiego matematyka Diofantosa, który żył w III w. p.n.e. w Aleksandrii. Był on ojcem tzw. języka algebraicznego. Stworzył m.in. symbol odejmowania i równości.

Ich szczególną formą są równania diofantyczne liniowe. Wtedy rozwiązania równania

$$ax + by = c$$

polega na wyznaczeniu wszystkich par (x, y) liczb całkowitych, spełniających to równanie.

Twierdzenie 1 *Równanie diofantyczne $ax + by = c$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $NWD(a, b)$ jest dzielnikiem liczby c .*

Przykład. Rozważmy równanie:

$$12x + 15y = 9$$

Dla niego:

$$a = 12, \quad b = 15, \quad c = 9$$

Wtedy

$$NWD(12, 15) = 3.$$

$NWD(12, 15)$ dzieli 9, zatem równanie ma rozwiązanie.

Jak zatem znaleźć rozwiązania? Skorzystamy z drugiego twierdzenia.

Twierdzenie 2 *Jeśli para liczb całkowitych (x_0, y_0) jest rozwiązaniem równania diofantycznego $ax + by = c$ i jeśli $d = NWD(a, b)$, gdzie $a = a'd$, $b = b'd$, $c = c'd$, to każde rozwiązanie dane jest wzorem*

$$\begin{cases} x = x_0 + tb' \\ y = y_0 + ta' \end{cases}$$

dla dowolnej liczby całkowitej t .

Przykład. Rozważmy równanie:

$$3x + 4y = 1$$

Łatwo zgadnąć, że $x = -1, y = 1$ jest rozwiązaniem. $NWD(3, 4) = 1$. Zatem wszystkie rozwiązania są postaci:

$$\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$$

dla dowolnej liczby całkowitej t .

A na koniec coś specjalnego! Wg legendy na nagrobku Diofantosa widniał poniższy napis:

Tu jest grobowiec, w którym złożono prochy Diofantosa. Przez jedną szóstą jego życia Bóg obdarzył go młodością, przez dalszą, dwunastą część życia jego policzki były pokryte brodą. Po siódmej dalszej części życia doświadczył szczęścia małżeńskiego, w którego piątym roku został ojcem syna. Niestety syn żył tylko połowę lat ojca, który pozostał w smutku przez cztery ostatnie lata swego życia. Przechodniu, oblicz długość jego życia!

Czy potrafisz obliczyć, ile lat żył Diofantos?