Porównywanie liczb w postaci wykładniczej

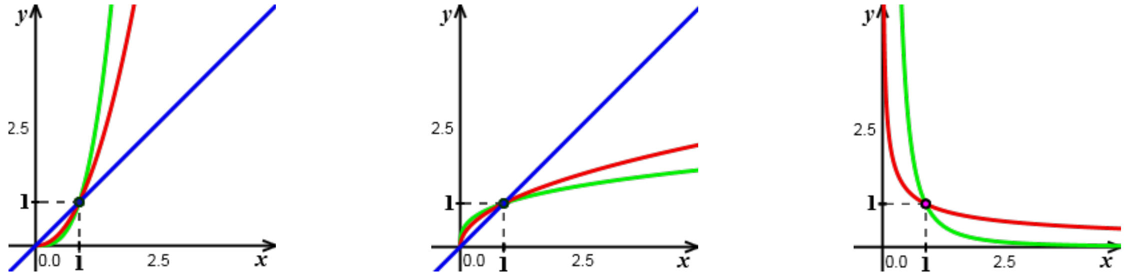
Zbigniew Paprzycki, Wydział Matematyki i Informatyki UWM

Postać wykładnicza liczby to postać a^b , gdzie a nazywamy podstawą potęgi, a b wykładnikiem potęgi. Porównywanie tak zapisanych liczb może nastręczać problemów mimo ich "niewinnego" wyglądu. Na przykład w zadaniu polegającym na ustawieniu od najmniejszej do największej liczb:

$$9^{60}, 3^{160}, 5^{60}, 27^{50}, 2^{240}$$

liczba $2^{240} = (2^{10})^{24} = (1024)^{24} > (10^3)^{24} = 10^{72}$ posiada co najmniej 73 cyfry. W porównywaniu takich liczb pomocna jest znajomość kilku faktów.

Fakt 1 *Funkcja potęgowa $f(x) = x^p$ dla $x > 0$ jest dla $p > 0$ funkcją rosnącą, a dla $p < 0$ funkcją malejącą.*



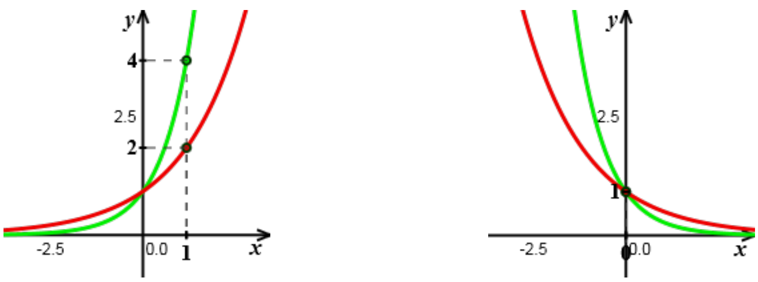
(a) $p = 3, 2, 1$ (b) $p = 1, 1/2, 1/3$ (c) $p = -1/2, -2$

Rysunek 1: Wykresy funkcji potęgowej dla $x > 0$

Przykład 1 *Ponieważ $5 < 9$, to np.* $5^{60} < 9^{60}$ *oraz* $5^{\sqrt{2}} < 9^{\sqrt{2}}$.

Zauważmy, że w funkcji potęgowej zmienia się podstawa, a wykładnik jest stały. Jeśli przyjmiemy odwrotnie, że zmienia się wykładnik, a podstawa jest stała, to otrzymamy funkcję wykładniczą.

Fakt 2 *Funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ dla $a > 0$ i $x \in R$ jest dla $a > 1$ rosnąca, a dla $0 < a < 1$ malejąca. Dla $a = 1$ jest stała i z reguły wyklucza się w definicji $a = 1$.*



(a) $a > 1$ (b) $0 < a < 1$

Rysunek 2: Wykresy funkcji wykładniczej.

Zauważmy, że aby skorzystać z własności funkcji wykładniczej podstawy porównywanych liczb muszą być takie same. Często udaje się nam w prosty sposób doprowadzić do tych samych podstaw, jak w poniższym przykładzie.

Przykład 2 *Ponieważ* $3 > 1$*, to np.* $3^{150} < 3^{160}$ *i analogicznie* $5^{\sqrt{2}} < 5^{\sqrt{3}}$*, ale* $(\frac{1}{3})^{\sqrt{2}} > (\frac{1}{3})^{\sqrt{3}}$*, ponieważ podstawa jest mniejsza od jedności.*

W zadaniu wspomnianym na początku mamy porównać $9^{60} = 3^{120}$ i $27^{50} = 3^{150}$. Po sprowadzeniu do wspólnej podstawy otrzymujemy $9^{60} < 27^{50}$, ponieważ przy tej samej podstawie równej 3, a więc większej od 1, odpowiednio wykładniki spełniają nierówność $120 < 150$. W ten sam sposób w zadaniu otrzymamy, że $27^{50} = 3^{150} < 3^{160}$ i ostatecznie

$$5^{60} < 9^{60} < 27^{50} < 3^{160}.$$

Problem pojawia się, gdy zarówno podstawy jak i wykładniki są różne w porównywanych liczbach oraz liczby nie dają się zapisać w prosty sposób z takimi samymi podstawami, jak to ma miejsce w zadaniu z liczbami 27^{50}, 2^{240}, 3^{160}.

Fakt 3 *Jeśli* $k = NWD(a, b)$ *dla całkowitych liczb* a *i* b*, to* $a = kn$ *i* $b = km$ *dla pewnych liczb całkowitych* n *i* m*.*

Fakt ten możemy stosować zarówno do podstaw jak i wykładników w celu uzyskania do porównywania mniejszych liczb. Mianowicie, jeżeli porównujemy liczby c^a i d^b oraz $NWD(a, b) = k$, to wtedy $c^a = c^{kn} = (c^n)^k$ i $d^b = d^{km} = (e^m)^k$. Korzystają z własności funkcji potęgowej wystarczy porównać liczby c^n i d^m i na przykład jeżeli

$$c^n < d^m, \text{ to } c^a = (c^n)^k < (e^m)^k = d^b.$$

Wracając do zadania porównamy 2^{240} z 27^{50}, gdzie $27^{50} = (3^3)^{50} = 3^{150}$. W ten sposób mamy dwie różne podstawy 2 i 3 oraz wykładniki 240 i 150. Ponieważ $NWD(240, 150) = 30$, więc problem sprowadza się do porównania liczb 2^8 i 3^5 i skorzystania z własności funkcji potęgowej o wykładniku 30.
Ponieważ $2^8 = 256 > 243 = 3^5$, to $2^{240} = (2^8)^{30} > (3^5)^{30} = 27^{50}$.
Analogicznie $NWD(240, 160) = 80$, więc $2^{240} = (2^3)^{80} = 8^{80} < 9^{80} = (3^2)^{80} = 3^{160}$.
W ten sposób uporządkowaliśmy wszystkie liczby z zadania

$$5^{60} < 9^{60} < 27^{50} < 2^{240} < 3^{160}.$$

Czasami zadanie może być trudniejsze, tak jak w przypadku liczb 15^{18} i 21^{15}. Tu również wykorzystamy największy wspólny dzielnik zarówno do wykładników jak i do podstaw. Mianowicie $NWD(18, 15) = 3$ i zadanie sprowadza się do porównania 15^6 i 21^5. W dalszych rozważaniach wykorzystamy dwa następne dość oczywiste fakty.

Fakt 4 *Dla* $a, b > 0$ *zachodzą równoważności* $a < b \Leftrightarrow \frac{a}{b} < 1$ *oraz* $a > b \Leftrightarrow \frac{a}{b} > 1$

Porównanie sprowadzimy do badania ilorazu tych liczb: $\frac{15^6}{21^5}$ wykorzystując największy wspólny dzielnik podstaw $NWD(15, 21) = 3$

$$\frac{15^6}{21^5} = \frac{(3 \cdot 5)^6}{(3 \cdot 7)^5} = 3 \cdot \frac{5^6}{7^5}$$

W ostatniej równości mamy trzy wzajemnie względnie pierwsze podstawy (NWD każdej pary podstaw równy jest 1). W takiej sytuacji możemy jeszcze wykorzystać następujący fakt.

Fakt 5 *Między każde liczby rzeczywiste* $a < b$ *można wstawić nieskończenie wiele liczb* c *takich, że* $a < c < b$*.*

Wykorzystamy ten fakt do naszych porównań. W tym celu należy zdecydować się na sprawdzaną relację: czy $a < b$, czy $a > b$. Nasz decyzja jest tylko przypuszczeniem, więc należy w razie niepowodzenia ją zmienić. Należy przy tym zachować ostrożność w wyborze wstawianej liczby pośredniej. Przyjmijmy, że decydujemy się na sprawdzenie prawdziwości nierówności

$$3 \cdot \frac{5^6}{7^5} > 1.$$

W tym celu pierwszą liczbę możemy zmniejszyć do liczby c takiej, że $3 \cdot \frac{5^6}{7^5} > c > 1$. Musimy jednak pamiętać, żeby zmniejszenie było możliwie małe i umożliwiało dalsze uproszczenie porównywanych liczb. My zastosujemy zastąpienie mnożnika 15 przez $14 = 2 \cdot 7$ (kilku procentowe zmniejszenie liczby).

$$3 \cdot \frac{5^6}{7^5} = \frac{(3 \cdot 5) \cdot 5^5}{7^5} = \frac{(15) \cdot 5^5}{7^5} > \frac{14 \cdot 5^5}{7^5} = \frac{(2 \cdot 7) \cdot 5^5}{7^5} = 2 \cdot \frac{5^5}{7^4}$$

W zasadzie moglibyśmy na tym zakończyć porównywanie, ponieważ można już bez kłopotu policzyć wartość ostatniego wyrażenia i porównać z liczbą jeden. Jednak dla ćwiczenia spróbujemy dalszych uproszczeń zastępując liczbę 10 liczbą 7.

$$2 \cdot \frac{5^5}{7^4} = \frac{(2 \cdot 5) \cdot 5^4}{7^4} = \frac{10 \cdot 5^4}{7^4} > \frac{7 \cdot 5^4}{7^4} = \frac{5^4}{7^3} = \frac{625}{343} > 1$$

Otrzymaliśmy ostatecznie

$$15^{18} > 21^{15}.$$

Zalecana jest jednak duża ostrożność w tworzeniu liczby pośredniej c, ponieważ możemy liczbę wyjściową zmienić zbyt dużo.