Suma wszystkich liczb naturalnych

Cezary Parzych kl. I D2, I Liceum Ogólnokształcące im. Stefana Żeromskiego w Ełku,
pod kierunkiem Grażyny Biernot-Lendo

Matematyka jest nauką, której nieodzownym elementem jest logika. Lecz pewne twierdzenia, wydawać by się mogło, że owej logice przeczą. Na przykład, myśląc logicznie można dojść do wniosku, że suma wszystkich liczb naturalnych jest równa nieskończoności. Można jednak pokazać inny sposób myślenia prowadzący do innych wniosków!

Lecz, żeby poznać wartość sumy wszystkich licz naturalnych, najpierw musimy określić co oznacza wyrażenie nieskończonego sumowania (które dla ułatwienia oznaczmy S) np.:

$$S=1-1+1-1+1-1+1-1+1...$$

Wyrażenia takie nazywamy szeregami.
Jeśli chcemy zachować własności znanego dodawania skończonej liczby składników: prawo łączności i prawo przemienności, to wydawać by się mogło, że są dwa rozwiązania zależne od tego, gdzie postawimy nawiasy:

1)

$$S=(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)...$$

$$S=0+0+0+0...$$

$$S=0,$$

zakładając „po cichu", że suma dowolnej liczby zer jest równa zero, a pamiętajmy, że jest to tylko założenie, bowiem na tym etapie rozważań nie mamy zdefiniowanego pojęcia nieskończonego sumowania i dopiero chcemy je określić. Wstawiając inaczej nawiasy otrzymujemy inne rozwiązanie.

2)

$$S=1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)...$$

$$S=1+0+0+0+0...$$

$$S=1$$

Lecz jest jeszcze trzecia opcja. Najpierw policzmy wartość wyrażenia: 1-S

$$1-S=1-(1-1+1-1+1-1+1...)$$

Po opuszczeniu nawiasu otrzymujemy (stosujemy prawo łączności, które chcemy aby było spełnione)

$$1-S=1-1+1-1+1-1+1-1+1...$$

Prawa strona tego równania jest równa S. Stąd

$$1-S=S$$

$$2S=1$$

$$S=1/2$$

Podsumowując otrzymaliśmy

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-\ldots = 1/2$$

Wyrażenie po lewej stronie nosi nazwę szeregu Grandiego, który został odkryty przez włoskiego matematyka - Guido Grandiego w 1703r.

Teraz, gdy znamy już wartość szeregu Grandiego możemy obliczyć sumę wszystkich liczb naturalnych (którą dla ułatwienia oznaczmy jako SN):

Najpierw wprowadźmy jeszcze jedną sumę (S1):

$$S1=1-2+3-4+5-6+\ldots$$

Dodajmy do niej jeszcze jedną sumę S1 (stosując prawo przemienności i łączności)

$$S1=1-2+3-4+5-6\ldots$$

$$S1=\quad 1-2+3-4+5-6+\ldots$$

$$2S1=1-1+1-1+1-1+1-\ldots=1/2$$

Otrzymaliśmy szereg Grandiego równy ½, czyli :

$$2S1=1/2$$

$$S1=1/4$$

Teraz zapiszmy wyrażenie SN-S1:

$$SN-S1=1+2+3+4+5+6\ldots$$

$$-1+2-3+4-5+6\ldots$$

$$SN-S1=0+4+0+8+0+12+0+16\ldots$$

$$SN-S1=4+8+12+16\ldots$$

Teraz wyciągamy 4 przed nawias:

$$SN-S1=4(1+2+3+4\ldots)$$

Wyrażenie w nawiasie to suma wszystkich liczb naturalnych, czyli SN, więc:

$$SN-S1=4SN$$

Podstawmy za S1 1/4 :

$$SN-1/4=4SN$$

$$3SN=-1/4$$

$$\mathbf{SN=-1/12}$$

Tak oto obliczyliśmy sumę wszystkich liczb naturalnych udowadniając, że suma ta nie równa się nieskończoności, lecz -1/12.

Uważny czytelnik już zauważył, że korzystanie w przypadku tego szeregu z prawa łączności i przemienności (punkty1, 2 i 3) prowadzi do niejednoznacznego wyniku i co łatwo wykazać do sprzeczności, więc nie ma możliwości takiego zdefiniowania sumy, aby te prawa były spełnione.

Zależność ta nie jest stosowana w matematyce, gdyż szereg Grandiego według współczesnej definicji sumy szeregu jest szeregiem rozbieżnym, czyli jego suma nie istnieje. Natomiast takie i inne rozważania tego tematu stanowiły podstawę wykształcenia się współczesnej definicji sumowania, a sposób, który podałem jest nazywany sumowaniem metodą Cesáro i ma inne znaczenie. Wartości w ten sposób obliczone są wykorzystywane w fizyce, np. w kwantowej teorii pola czy teorii strun.