Przedstawienie liczb całkowitych w postaci pewnego iloczynu

Paweł Lefelbajn, II LO w Elblągu; klasa III

Założenie: $t \in Z\backslash\{0\}$, $x \in Z$, $y \in Z$

Teza: $\bigwedge_{t \in Z\backslash\{0\}} \bigvee_{\substack{x \in Z \\ y \in Z}} t = (3x-1)(2y-1)$

Dowód. Każdą liczbę $t \in Z$ można przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych tzn.

$$t = \pm 2^m \prod_{i=1}^{n} {a_i}^{b_i},$$

gdzie a_i to nieparzysta liczba pierwsza, będąca czynnikiem, występującym w potędze b_i.

Ponieważ $\prod_{i=1}^{n} {a_i}^{b_i} \equiv 1(mod\ 2)$, to oznaczmy $\prod_{i=1}^{n} {a_i}^{b_i} = 2k-1$, $k \in Z$. Wtedy

$$t = 2^m * (2k-1)\ .$$

1° Niech t ≡ 1(mod 2). Wtedy $m = 0$ i $t = 2k-1$ dla $k \in Z$. Zauważmy, że

$$t = 2k-1 = (3*0-1)*[2(-k+1)-1].$$

Przyjmując $x = 0$ i $y = -k+1$ otrzymujemy, że $t = (3x-1)(2y-1)$. Zatem

$$\bigwedge_{\substack{t=2k-1 \\ k \in Z}} \bigvee_{\substack{x \in Z \\ y \in Z}} t = (3x-1)(2y-1)$$

2° Niech t ≡ 0(mod 2). Wtedy $m \neq 0$ i $t = 2^m * (2k-1)$ dla $k \in Z$.

Zauważmy, że dla $m \in Z^+$ liczba 3 nie jest dzielnikiem liczby 2^m.

Zatem dla m istnieje $l \in Z$ takie, że $2^m = 3l+1 \vee 2^m = 3l-1$.

Ponadto każdą liczbę nieparzystą można przedstawić jako $2y-1$ dla $y \in Z$.
Stąd

$$t = 2^m * (2k-1) = (3l-1)(2k-1) = (3x-1)(2y-1) \text{ dla } x = l \wedge y = k$$

lub

$$t = 2^m * (2k-1) = (3l+1)(2k-1) = (3(-l)-1)(2(-k+1)-1) =$$
$$= (3x-1)(2y-1)$$

dla $x = -l \wedge y = -k+1$

Ostatecznie łącząc ze sobą 1° i 2° dochodzimy do wniosku; że

$$\bigwedge_{t \in Z\backslash\{0\}} \bigvee_{\substack{x \in Z \\ y \in Z}} t = (3x-1)(2y-1)$$