Przeliczalne sumy i iloczyny zbiorów

Elżbieta Guziejko, I Liceum Ogólnokształcace w Olecku
Zbigniew Paprzycki, Wydział Matematyki i Informatyki UWM w Olsztynie

Przede wszystkim musimy określić znaczenie słowa przeliczalny, które określa pewną własność zbiorów. Na użytek tego artykułu przyjmiemy, że zbiór przeliczalny, to zbiór nieskończony, którego elementy dają się ponumerować liczbami naturalnymi 1, 2, 3, … lub inaczej mówiąc dają się ustawić w ciąg. Możemy taki zbiór zapisać następująco:

$$\{x_1, x_2, x_3, ...\}$$

lub jako ciąg np. $A_1, A_2, A_3, ...$. Dokładniej pojęcie przeliczalności wyjaśnione jest w artykule [1].

Definicja.

Przeliczalną sumą zbiorów $A_1, A_2, A_3, ...$ oznaczaną $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ nazywamy zbiór określony relacją

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Leftrightarrow \quad \bigvee_{n \in N} x \in A_n .$$

Możemy również powiedzieć, że suma $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ składa się z tych elementów, które należą przynajmniej do jednego z sumowanych zbiorów i tylko z tych elementów.

Definicja.

Przeliczalnym iloczynem zbiorów $A_1, A_2, A_3, ...$ oznaczanym $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ nazywamy zbiór określony relacją

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Leftrightarrow \quad \bigwedge_{n \in N} x \in A_n .$$

Możemy również powiedzieć, że iloczyn $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ składa się z tych elementów, które należą do każdego zbioru $A_1, A_2, A_3, ...$ i tylko z tych elementów.

Własności.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n)$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n)$$

$$B \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B) \ , \quad B \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B)$$

Prawa de Morgana: dopełnienie sumy zbiorów to iloczyn dopełnień zbiorów i odwrotnie dopełnienie iloczynu zbiorów to suma dopełnień tych zbiorów

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)' = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n'$$

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)' = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n'$$

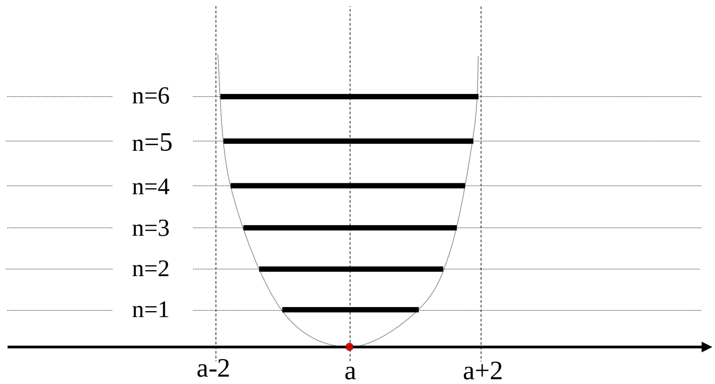
Własność.

Jeżeli zbiory tworzą wstępujący ciąg tzn. $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ przedziałów otwartych, to $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ jest też przedziałem otwartym.

Przykład 1.

Dla wstępujących przedziałów domkniętych $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ suma nie musi być przedziałem domkniętym.

Niech $A_n = \left\langle a - \frac{2n}{n+1}, a + \frac{2n}{n+1} \right\rangle$ dla $n = 1,2,3,\ldots$. Wtedy $A_1 = \langle a-1, a+1 \rangle$, $A_2 = \left\langle a - \frac{4}{3}, a + \frac{4}{3} \right\rangle$, $A_3 = \left\langle a - \frac{6}{4}, a + \frac{6}{4} \right\rangle, \ldots$ i oczywiście $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, co przedstawia następujący rysunek, na którym kolejne przedziały umieszczono jeden nad drugim.



Z rysunku widać, że punkty $a-2$ oraz $a+2$ nie należą do żadnego zbioru A_n, więc nie mogą należeć do sumy $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, natomiast dla każdego punktu $x \in (a-2, a+2)$ istnieje przedział $A_n = \left\langle a - \frac{2n}{n+1}, a + \frac{2n}{n+1} \right\rangle$ taki, że $x \in A_n$. Ostatecznie $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (a-2, a+2)$.

Własność.

Jeżeli zbiory tworzą zstępujący ciąg tzn. $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ przedziałów domkniętych, to $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ jest też przedziałem domkniętym lub zbiorem pustym.

Przykład 2.

Dla zstępujących przedziałów otwartych $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ suma nie musi być przedziałem otwartym.

Postępując analogicznie jak w przykładzie 1, przyjmujemy zbiory postaci $A_n = \left(a - \frac{n+1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$ dla $n = 1,2,3,\ldots$. Pozostawiamy czytelnikowi wykazanie, że $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \langle a-1, a\rangle$.

Przykład 3

Niech dla każdego $n \in N$ $A_n = \left\{x \in R : \frac{1}{n} \le x \le \frac{3}{n}\right\}$. Wyznacz zbiory:

a) A_n dla $n = 1,2,3,4$; b) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; c) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Rozwiązanie

a) $A_1 = \{x \in R : 1 \le x \le 3\} = \langle 1,3\rangle$

$$A_2 = \left\{x \in R : \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}\right\} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle$$

$$A_3 = \left\{x \in R : \frac{1}{3} \le x \le 1\right\} = \left\langle \frac{1}{3}, 1\right\rangle$$

$$A_4 = \left\{x \in R : \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4}\right\} = \left\langle \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\rangle$$

b) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \langle 1,3\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{3}, 1\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\rangle \cup \ldots = (0, 3\rangle$.

c) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \langle 1,3\rangle \cap \left\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle \cap \left\langle \frac{1}{3}, 1\right\rangle \cap \left\langle \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\rangle \cap \ldots = \varnothing$

Przykład 4.

Wyznacz $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ i $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, jeżeli $A_n = \left\{x \in R : -\frac{1}{n} \le x < \frac{1}{n^2+1}\right\}$.

Rozwiązanie

$$A_1 = \left\langle -1, \frac{1}{2}\right), \quad A_2 = \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right), \quad A_3 = \left\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{10}\right), \quad \ldots$$

Widzimy, że $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ więc $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 = \left\langle -1, \frac{1}{2}\right)$

$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Leftrightarrow \quad \bigwedge_{n \in N} -\frac{1}{n} \le x < \frac{1}{n^2+1}$. Ponieważ $-\frac{1}{n}$ *i* $\frac{1}{n^2+1}$ dążą do zera, więc jedyną liczbą spełniającą warunek jest $x = 0$. Stąd $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$.

Zadania do przemyślenia.

Wykaż, że: a) A jest przedziałem domkniętym, b) B jest przedziałem otwartym dla

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\langle a, b + \frac{1}{n}\right), \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a, b - 2^{-n}\right\rangle \text{ , gdzie a < b .}$$

Literatura.

[1] B. Chojnowski, Z. Paprzycki, *Zbiory przeliczalne i ciągi*, http://strefamatematyczna.uwm.edu.pl