Zbiory przeliczalne i ciągi

Bartosz Chojnowski, I Liceum Ogólnokształcące w Ełku
Zbigniew Paprzycki, Wydział Matematyki i Informatyki UWM

Kiedy mamy zbiory o skończonej liczbie elementów, łatwo stwierdzić, który ma większą miarę. Można np. policzyć, ile mają elementów i wybrać ten, w którym wyszła większa liczba. Jest to jednak kłopotliwe, gdy tych elementów jest naprawdę dużo, bo trzeba liczyć w jednym zbiorze, liczyć w drugim itd. Szybciej byłoby, gdybyśmy tak bez dokładnego zliczania łączyli elementy w pary i ten zbiór, w którym elementy się szybciej skończą, jest mniej liczny. Zagadnienie raczej banalne. Rozszerzmy je do zbiorów o nieskończonej liczbie elementów – dajmy na to liczby dodatnie parzyste $\{2,4,6,8,\ldots\}$ i dodatnie nieparzyste $\{1,3,5,7,\ldots\}$. Których jest więcej? Przecież ich nie policzymy, bo jednych i drugich jest nieskończenie wiele (cokolwiek to znaczy), więc w ten sposób nie porównamy tych zbiorów. Ale jeśli będziemy łączyć je w pary, okaże się, których jest więcej. No to parujemy: $(1,2)$, $(3,4)$, $(5,6)$, $(7,8)$,…, $(n,n+1)$,… dla $n=2k-1$, gdzie $k \in N_+$. Okazuje się, że każdą liczbę nieparzystą złączymy z każdą parzystą, czyli jest ich tyle samo. Pomysł z łączeniem w pary jest całkiem dobry, więc go sformalizujmy wprowadzając kilka precyzyjnych definicji.

Definicja 1.
Napis $f : X \to Y$ oznacza, że funkcja f ma dziedzinę X, a Y jest przeciwdziedziną, czyli w zbiorze Y są wszystkie wyniki $y = f(x)$.

Przykład 1. Weźmy prosty przykład $f : C \to N$, $f(x) = x^2$, gdzie C jest dziedziną tej funkcji, a N jest jej przeciwdziedziną – tutaj nie wszystkie elementy przeciwdziedziny są wynikami funkcji f.

Przykład 2. Dla funkcji $f : C \to \mathrm{N}$, $f(x) = |x|$ wszystkie elementy przeciwdziedziny są wartościami funkcji f.

Definicja 2.
Obrazem $f(X)$ dziedziny funkcji nazywamy zbiór tych elementów przeciwdziedziny, które są wynikami przekształcenia f, czyli $f(X) = \{y \in Y : y = f(x)\ dla\ x \in X\}$.

Przykład 3. Dla funkcji z przykładu 1 zachodzi $f(X) \subset Y$, ale $f(X) \neq Y$, natomiast dla funkcji z przykładu 2 mamy $f(X) = Y$.

Definicja 3.
Zbiory X i Y nazywamy równolicznymi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje różnowartościowa funkcja $f : X \to Y$ taka, że $f(X) = Y$.

Funkcja z definicji 3 opisuje w sposób formalny ustawianie elementów zbiorów X i Y w pary (x, y), gdzie $y = f(x)$. Różnowartościowość zapewnia, że różnym elementom zbioru X

będą przyporządkowane różne elementy zbioru Y, warunek $f(X)=Y$ zapewnia, że żaden element nie pozostanie bez pary.

Przykład 4. Z powyższych rozważań dla zbioru X liczb dodatnich nieparzystych i zbioru liczb dodatnich parzystych funkcja $f(x)=x+1$ jest ewidentnie różnowartościowa i zbiór wszystkich wartości funkcji f, to dokładnie zbiór liczb parzystych, czyli $f(X)=Y$. Zatem zbiory X i Y są równoliczne.

Definicja 4.
Zbiór nazywamy przeliczalnym, jeśli jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

Przykład 5. Zbiór Y liczb parzystych dodatnich jest zbiorem przeliczalnym, bo można utworzyć różnowartościową funkcję $f:Y\to N$ taką, że wynikami będą wszystkie liczby naturalne : $f(y)=\frac{y}{2}-1$.

Może być tak, że usuwając ze zbioru przeliczalnego przeliczalną liczbę elementów on wciąż będzie przeliczalny. Rozpatrzmy kilka sytuacji, niektóre są zgodne z intuicją, niektóre bulwersują. Który zbiór jest większy: *N*, czy N_+? Intuicja podpowiada, że elementów w *N* powinno być o jeden element więcej (dokładnie o liczbę zero) niż w N_+, a są to zbiory równoliczne, bo każdy element z N_+ można połączyć w parę z każdym elementem z *N* prostą funkcją $f(n)=n-1$. Podobnie, który zbiór ma więcej elementów: *C,* czy *N* ? Wydaje się, że liczb całkowitych jest około dwa razy więcej niż naturalnych, a tu niespodzianka – jest ich tyle samo, co czytelnik wykaże w zadaniach (zadanie 2). Natomiast jeśli z *N* zabiorę wszystkie elementy $n>5$, to otrzymam zbiór ewidentnie mniejszy i w dodatku skończony. Czyli każdy podzbiór zbioru przeliczalnego jest co najwyżej przeliczalny.

Definicja 5.
Ciągiem o wartościach w zbiorze Y nazywamy każdą funkcję $f:N_+\to Y$ określoną na zbiorze liczb naturalnych dodatnich, przy czym wartość $f(n)$ nazywamy *n*-tym wyrazem ciągu i oznaczamy a_n.

Czyli np. ciąg liczb dodatnich, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2, to ciąg liczb 2, 7, 12, 17, 22,…, który możemy opisać wzorem $a_n=(n-1)\cdot 5+2$ przekształcając liczby z N_+ na wymienione wyżej liczby a_n.

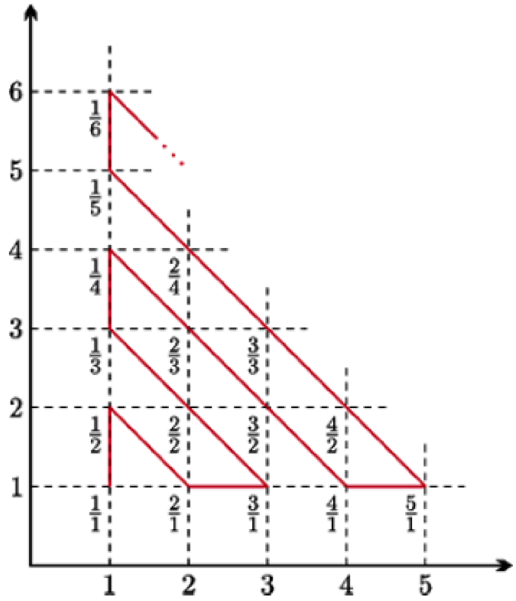
Twierdzenie.
Każdy zbiór przeliczalny X możemy ustawić w ciąg: $x_1,x_2,x_3,...$ tak, że $X=\{x_1,x_2,x_3,...\}$ i odwrotnie, jeśli $X=\{x_1,x_2,x_3,...\}$, to zbiór X jest skończony lub przeliczalny.

Przykład 5. Pokażemy, że zbiór liczb wymiernych jest zbiorem przeliczalnym, ustawiając wszystkie liczby wymierne w ciąg. Jak wiadomo, liczby wymierne to takie, które można zapisać w postaci ułamka zwykłego. Będziemy poruszać się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych poruszając się po przekątnych kwadratów o wierzchołku w (0,0) i bokach na osiach układu jak na rysunku i wypisywać punkty o całkowitych współrzędnych zapisując odciętą w liczniku, a rzędną w mianowniku. Czyli np. punkt (3,9) odpowiada liczbie $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

Ułamki o powtarzających się wartościach będziemy pomijali (np. nie wypiszemy $\frac{2}{2}$, bo już wcześniej było $\frac{1}{1}$), a każdy kolejny ułamek będziemy numerować (czyli ustawiać w ciąg) przyporządkowując wszystkim liczbom naturalnym dodatnim kolejne ułamki.

Każda liczba dodatnia wymierna pojawi się na tej planszy, bo w licznikach i w mianownikach wystąpią wszystkie liczby naturalne dodatnie. W ten sposób ustawiliśmy w ciąg wszystkie liczby wymierne dodatnie. Co z ujemnymi?

Jeśli mamy już ustawione wszystkie liczby wymierne w „kolejkę” : 1, $\frac{1}{2}$, 2, 3, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, 4, 5, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, (tak wygląda początek tego ciągu już po usunięciu powtarzających się liczb), przestawiamy liczby tak, by stały na kolejnych nieparzystych miejscach, a pozostawione luki wypełniamy liczbami przeciwnymi: 1,-1, $\frac{1}{2}$,-$\frac{1}{2}$, 2, -2, 3, -3, $\frac{1}{3}$,-$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,-$\frac{1}{4}$,…) dzięki czemu wszystkie liczby wymierne ustawimy w ciąg, ponumerujemy, zatem zbiór *W* jest przeliczalny.



Czy zatem każde nieskończone zbiory liczbowe są przeliczalne? Okazuje się, że nieskończoność nieskończoności nierówna, więcej, można stwierdzić, że jedna ma inną miarę niż druga – np. w przedziale otwartym (0,1) jest istotnie więcej liczb rzeczywistych, niż wszystkich naturalnych, ale to już temat na inną rozmowę…

Zadania do rozwiązania:

1. Przypomnij definicję funkcji różnowartościowej i sprawdź, czy są różnowartościowe funkcje:
   a. $a_n = (n-1)\cdot 5 + 2$, dla $n \in \mathrm{N}$,
   b. $f(y) = \frac{y}{2} - 1$, dla y parzystych dodatnich; $f(x) = x^2$, dla $x \in R$,
   c. $g(x) = x^2$, dla $x \in R_+$
2. Udowodnij, że zbiór liczb całkowitych jest przeliczalny podając wzór funkcji różnowartościowej $f: N \to C$.
3. Których dodatnich liczb jest więcej: dających przy dzieleniu przez 5 resztę 2, czy takich, co przy dzieleniu przez 7 dają resztę 4 lub 5?