Uważaj w jakim języku mówisz

Andrzej Orlicki
Wydział Matematyki i Informatyki UWM

Anna Szczepkowska
Wydział Matematyki i Informatyki UWM

Używając słów dostępnych w języku polskim możemy definiować konkretne liczby naturalne. Bardzo prosty przykład: numer budynku naszego Wydziału to liczba "pięćdziesiąt cztery". Można trochę bardziej skomplikowanie. Zdefiniujemy liczbę naturalną n mówiąc, że jest to "najmniejsza liczba naturalna parzysta większa od liczby naturalnej sto". Oczywiście n=102. Poprawnie zdefiniowanych słów jest w języku polskim skończenie wiele. Zatem skończonych ciągów słów, których to ciągów długość jest mniejsza np. od 100, jest też skończenie wiele. W konsekwencji tylko skończenie wiele liczb naturalnych możemy zdefiniować w języku polskim używając mniej niż 100 słów. Ale liczb naturalnych jest nieskończenie wiele. Możemy zatem zdefiniować liczbę naturalną A mówiąc, że A jest to "najmniejsza liczba naturalna, do zdefiniowania której w języku polskim potrzeba co najmniej stu słów". Policzmy słowa w powyższej definicji. Jest ich 14 (przecinka nie liczymy). Coś tu nie gra: wystarczy 14, czy potrzeba co najmniej 100?

Wiemy, że zdaniom logicznym możemy jednoznacznie przypisać wartość logiczną prawdy lub fałszu. Na przykład zdanie "Jeśli dzisiaj jest środa, to jutro będzie czwartek" jest oczywiście prawdziwe. Natomiast zadanie "Jeśli dzisiaj jest środa, to jutro będzie sobota" jest ewidentnie fałszywe (trochę szkoda, że tak jest). Jasne? Jasne! Rozważmy zatem następujące zdanie, które oznaczymy przez p : "To, co tutaj jest napisane jest fałszem". Pomyśl trochę drogi Czytelniku, czy powyższe zdanie p jest prawdziwe, czy też jest fałszywe? Po chwili namysłu zauważysz, że zdanie p jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy p jest fałszywe. Znowu nam coś tu nie gra!

W przypadku definicji liczby A i w przypadku pytania o wartość logiczną zdania p dostaliśmy sprzeczność. Czy sprzeczności te można usunąć? Okazuje się, że tak. Logika matematyczna odróżnia tak zwany język przedmiotowy od metajęzyka. Język przedmiotowy jest to język, który jest przedmiotem naszych zainteresowań. Natomiast metajęzyk jest to język w którym mówimy o języku przedmiotowym. Ucząc się w polskiej szkole języka angielskiego mówimy o tym języku (na ogół) w języku polskim. Wówczas język angielski jest językiem przedmiotowym (bo o nim mówimy), zaś język polski jest dla niego metajęzykiem (bo w języku polskim wyjaśniamy zawiłości języka przedmiotowego). Powróćmy do naszej liczby naturalnej A. Mówiąc o "zdefiniowaniu w języku polskim" mówimy o języku polskim jako języku przedmiotowym. Natomiast sama definicja liczby A jest to definicja w metajęzyku. Stąd, licząc słowa w tej definicji, liczymy słowa metajęzyka, a nie języka przedmiotowego. Skomplikowane? Przyznajmy, że trochę tak. Ale warto nad tym trochę się zastanowić. Reasumując: w definicji liczby A nie ma żadnej sprzeczności.
A co ze zdaniem p? Zauważmy, że zdanie p orzeka o swojej własnej fałszywości. Zdanie

powinno być sformułowane w języku przedmiotowym, zaś orzeczenie o jego prawdziwości (lub fałszywości) już w metajęzyku. Tymczasem w tym przypadku

język przedmiotowy = metajęzyk.

Tak być nie może! Podsumowując: wypowiedź *p,* którą do tej pory nazywaliśmy zdaniem, nie jest zdaniem logicznym i nie przysługuje jej zaszczyt bycia prawdziwym bądź fałszywym. To samo inaczej: z punktu widzenia logiki nie ma sensu pytanie o prawdziwość lub fałszywość wypowiedzi *p.* Zauważ, drogi Czytelnika, że w naszych rozważaniach nie użyliśmy praktycznie żadnych "wzorków", do których jesteśmy przyzwyczajeni w matematyce szkolnej. Tym niemniej, nasze rozważania należą do matematyki, a dokładniej do logiki matematycznej. Z logiką matematyczną studenci matematyki zapoznają się na starszych latach studiów.

Na zakończenie jeszcze jedna uwaga. Jeśli na lekcji języka polskiego Nauczyciel mówi nam o gramatyce języka polskiego (rzeczowniki, czasowniki, itp.), to formalnie rzecz biorąc mówi do nas w metajęzyku polskim. Co nie zmienia faktu, że gramatyki należy się pilnie uczyć:)